Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 60-63 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 27.04.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 60:(*2+7+3 Punkte*)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit der Bilinearform

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Wir sagen, dass:

- $\mathbf{x}$ raumartig ist, wenn $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$
- $\mathbf{x}$ lichtartig ist, wenn $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0$
- $\mathbf{x}$ zeitartig ist, wenn $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \leq 0$

Beweisen Sie:

a) Der Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann lichtartig, wenn er die folgende Gleichung erfüllt:

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$$

b) Der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist genau dann zeitartig, wenn $\mathrm{span}(\mathbf{x})^\perp$ nur raumartige Vektoren enthält.

c) Der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei raumartig. Besteht dann $\mathrm{span}(\mathbf{x})^\perp$ nur aus zeitartigen Vektoren?

Aufgabe 61:(*3+3+4 Punkte*)
Sei $C([0,\, 1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,\, 1] \subset \mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen definieren eine Norm? (Beweis oder Gegenbeispiel)

a)

$$\|\,.\,\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty), \quad \|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k\| = \max\{|\lambda_k| \;:\; k = 1,\ldots,n\}$$

b)

$$\|\,.\,\| : \mathbb{C}^2 \longrightarrow [0,\infty), \quad \|\mathbf{z}\| = \sqrt{|z_1^2 + z_2^2|}$$

c)

$$\|\,.\,\| : C([0,\, 1]) \longrightarrow [0,\infty), \quad \|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$$

Aufgabe 62:(*10 Punkte*)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann kann man V mit der auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eingeschränken Skalarmultiplikation als Vektorraum $V^{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$ auffassen. Der Vektorraum V entspricht dem Paar $(V^{\mathbb{R}}, I)$, wobei I den $\mathbb{R}$-Vektorraumautomorphismus

$$I : V^{\mathbb{R}} \longrightarrow V^{\mathbb{R}}, \quad v \longmapsto i \cdot v$$

bezeichnet. Sei $\mathcal{H}$ die Menge der hermiteschen Skalarprodukte auf V und $\mathcal{G}$ die Menge der euklidischen Skalarprodukte g auf $V^{\mathbb{R}}$, die $g(v, w) = g(Iv, Iw)$ für alle $v, w \in V^{\mathbb{R}}$ erfüllen. Beweisen Sie, dass

$$\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad g \longmapsto ((v, w) \mapsto g(v, w) + ig(v, iw))$$

eine bijektive Abbildung zwischen den angegebenen Mengen ist.

Aufgabe 63:(*8 Punkte*)
Sei $\mathbb{R}[x]_d \subset \mathbb{R}[x]$ der Untervektorraum der Polynome f mit $\deg(f) \leq d$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Finden Sie eine Menge von 3 Polynomen f_0, f_1, f_2, so dass für alle $0 \leq d \leq 2$ die Polynome $f_0, \ldots, f_d$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_d$ bilden.