Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Probeklausur

Mathematik für Physiker II
SS 2011

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

05.07.2011

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

---

von den Korrektoren auszufüllen:

____

Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12

$\sum$:

1. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Beweisen Sie, dass* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ *eine Untergruppe von* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ *ist.*

   Lösung
   Nach Definition besteht $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ aus den Matrizen in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$, deren Determinante 1 ist. Wir beweisen mit Hilfe des Untergruppenkriteriums, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ ist. Hierfür benutzen wir das Determinantenmultiplikationsgesetz $(\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B))$:

   (a) Da die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ ist, ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ nicht die leere Menge.

   (b) Sei $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Mit
   $$\det \mathbb{1}_2 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \cdot \det(A^{-1})$$
   folgt $\det(A^{-1}) = 1$ und damit $A^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$.

   (c) Seien $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Mit
   $$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$
   folgt $A \cdot B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$.

2. *Sei*
   $$\sigma = (1\,5\,6)\,(2\,3) \in S_6.$$
   Bestimmen Sie die Determinante der Permutationsmatrix $(e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(6)})$.
   Begründen Sie Ihr Ergebnis.

   Lösung
   Sei $(a_{ij}) = A = (e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(6)})$. Dann gilt nach der expliziten Formel für die Determinante:
   $$\det(A) = \sum_{\tau \in S_6} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(6)6}$$
   Da für $\tau \neq \sigma$ ein i mit $\tau(i) \neq \sigma(i)$ existiert und für dieses i nach der Definition von A die Bedingung $a_{\tau(i)i} = 0$ gilt, folgt
   $$\det(A) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(6)6} = \varepsilon(\sigma),$$
   da für alle $k = 1, \dots, 6$ gilt: $a_{\sigma(k)k} = 1$
   Also folgt
   $$\det(A) = \varepsilon(\sigma) = \varepsilon((156)(23)) = \varepsilon((16)(15)(23)) = (-1)^3 = -1.$$

3. *Es sei*
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   Welche der folgenden Matrizen ist $\left((-1)^{i+j} \det \left(A_{ji}\right)_{i,j}\right)$, *wobei* A_{ij} *die* (i,j)*-te Streichungsmatrix von* A *ist?*
   $$M_1 = \begin{pmatrix} b & -d \\ -a & c \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$
   $$M_3 = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & b \end{pmatrix}$$

(Ohne Begründung)

Lösung

M_6

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}(10, \mathbb{R})$ und

$$P_A(t) = t^3(t^2+1)^2(t-1)^3$$

das charakteristische Polynom von A. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets wahr (**W**) oder (für manche A) falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W	**F**	
⊠	☐	$\dim V_0 \leq 3$
☐	⊠	$\dim V_0 = 3$
⊠	☐	1 ist ein Eigenwert von A.
☐	⊠	-1 ist ein Eigenwert von A.
☐	⊠	A ist diagonalisierbar.

Erläuterung:

1) $\dim V_0 > 3$ impliziert, dass t^4 das charakteristische Polynom teilt, was hier nicht der Fall ist.

2) Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ mit $(*) \in \mathrm{Mat}(7, \mathbb{R})$

3) Da $P_A(1) = 0$ ist, ist 1 ein Eigenwert von A.

4) Da $P_A(-1) = 32 \neq 0$ ist, ist -1 kein Eigenwert von A.

5) (siehe 2)

5. *Geben Sie eine Basis des Vektorraums der schiefsymmetrischen Bilinearformen*

$$\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \rho(x, y)$$

an. Notieren Sie dabei die Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$ *als Polynom* $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j$ *mit* $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(Ohne Begründung)

Lösung

$$x_1y_2 - x_2y_1, \quad x_1y_3 - x_3y_1, \quad x_2y_3 - x_3y_2$$

Erläuterung:

Wenn man zum Beispiel die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ wählt, kann man den Raum der schiefsymmetrischen Bilinearformen mit dem Raum ihrer schiefsymmetrichen Darstellungsmatrizen identifizieren, dessen Elemente von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Dieser Raum ist isomorph zu $\mathbb{R}^3$ und die obige Matrix entspricht genau dem Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Unter dieser Identifizierung stehen in der Lösung genau die Vektoren, die den Vektoren e_1, e_2, e_3 der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$ entsprechen.

6. Betrachten Sie den Hilbertraum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ mit der kanonischen Hilbertbasis $(e_k)_k$. Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Elementen des Hilbertraums. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W	**F**	
☒	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist beschränkt, wenn $f_n = e_n$ ist.
☐	☒	Die Folge $(f_n)_n$ ist konvergent, wenn $f_n = e_n$ ist.
☒	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist konvergent, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ ist.
☐	☒	Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert gegen 0, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ ist.
☒	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist beschränkt, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e_k$ ist.

Erläuterung:

1) $\| f_n \| = \| e_n \| = 1$

2) Da $\| f_n \| = 1$ ist, konvergiert die Folge nicht gegen 0. Also muß ein Grenzwert $0 \neq f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ erfüllen, dass es ein $a_k \neq 0$ gibt. Dem widerspricht aber, dass dann für $n > k$ gilt: $\| f_n - f \| \geq |a_k| > 0$

3 und 4) Die Folge konvergiert nicht gegen 0, sondern gegen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \in \ell^2$.

5) Die Folge ist sogar konvergent mit dem Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e_k \in \ell^2$.

7. *Es sei* $\| \, . \, \|_2$ *die Norm auf* $\mathbb{R}^3$, *die definiert ist durch*

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \textit{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Operatornorm der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bezüglich $\| \, . \, \|_2$. *Begründen Sie Ihr Resultat.*

Lösung

Man hat $\| f \| = 3$. Um dies zu sehen, benutzen wir die Definition

$$\| f \| = \sup \frac{\left\| f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zuerst stellt man fest

$$\left\| f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = 3 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Also gilt

$$\| f \| \geq 3.$$

Außerdem gilt

$$\left\| f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + (2y)^2 + (3z)^2} \leq \sqrt{(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2}$$

$$= 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3 \left\| f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Damit gilt

$$\| f \| \leq 3$$

und es folgt die Aussage.

8. *Bestimmen Sie alle* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *an denen*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \exp(\cos(x)) \sin(y) + z^2$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Begründen Sie Ihr Resultat.

Lösung

Da f differenzierbar ist, sind lokale Extremwerte Nullstellen von $\operatorname{grad}(f)$.

$$\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = (-\sin(x) \exp(\cos(x)) \sin(y), \exp(\cos(x)) \cos(y), 2z)$$

Man hat also $\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = 0$ genau dann, wenn

$$\sin(x) = \cos(y) = z = 0$$

ist. Also muss in diesem Fall gelten:

$$x = k\pi, \quad y = \ell\pi + \frac{1}{2}\pi, \quad z = 0 \quad \text{mit} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$$

Ferner hat man die Hessematrix

$$\begin{pmatrix} -\cos(x)\exp(\cos(x))\sin(y) + \sin^2(x)\exp(\cos(x))\sin(y) & -\sin(x)\exp(\cos(x))\cos(y) & 0 \\ -\sin(x)\exp(\cos(x))\cos(y) & -\exp(\cos(x))\sin(y) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn $y = \frac{1}{2}\pi + 2\ell\pi$ ist, kann kein lokales Extremum vorliegen, da dann die Hessematrix die Form

$$\begin{pmatrix} -\cos(x)\exp(\cos(x)) + \sin^2(x)\exp(\cos(x)) & 0 & 0 \\ 0 & -\exp(\cos(x)) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat und indefinit ist, wie man am zweiten und dritten Eintrag der Hauptdiagonalen sieht.
Wenn man nun $x = 2(k+1)\pi$ und $y = \frac{3}{2}\pi + 2\ell\pi$ wählt, hat die Hessematrix die Form

$$\begin{pmatrix} -\exp(-1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix indefinit ist, liegt hier kein Extremum vor.
Nun hat man an der Stelle $x = 2k\pi$ und $y = \frac{3}{2}\pi + 2\ell\pi$ eine Hessematrix von der Form

$$\begin{pmatrix} \exp(1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix positiv definit ist, liegt hier ein lokales Minimum vor.

9. *Es seien $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Abbildungen. Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, G(x_1, x_2))$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_1, x_2)$ und mit Hilfe der Funktionen $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $G(x_1, x_2)$ als Funktion in x_1, x_2 aus.*

Lösung
Wir schreiben $G(x_1, x_2) = (G_1(x_1, x_2), G_2(x_1, x_2))$. Damit definiert man $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ via $H(x_1, x_2) = (x_1, x_2, G_1(x_1, x_2), G_2(x_1, x_2))$. Also ist

$$F(x_1, x_2, G(x_1, x_2)) = (F \circ H)(x_1, x_2).$$

Wir können jetzt die Kettenregel für $F \circ H$ anwenden und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, x_2, G(x_1, x_2)) = \frac{\partial}{\partial x_1}(F \circ H)(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial x_k}(H(x_1, x_2)) \frac{\partial H_k}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, G(x_1, x_2)) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, G(x_1, x_2)) \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$$+\frac{\partial F}{\partial x_4}(x_1,x_2,G(x_1,x_2))\frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)$$

Analog gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}F(x_1,x_2,G(x_1,x_2))=\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2,G(x_1,x_2))$$

$$+\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1,x_2,G(x_1,x_2))\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)+\frac{\partial F}{\partial x_4}(x_1,x_2,G(x_1,x_2))\frac{\partial G_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

10. *Sei*

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.
Geben Sie eine hinreichende Bedingung an, so dass für alle $(p,q,r)\in f^{-1}(0,0)$ offene Umgebungen $V\subset\mathbb{R}$ von p und $W\subset\mathbb{R}^2$ von (q,r) existieren und es eine stetig differenzierbare Abbildung $g:V\to W$ gibt, so dass für alle $(x,y,z)\in V\times W$ gilt:

$$f(x,y,z)=0\Longleftrightarrow(y,z)=g(x)$$

Lösung
Das Differential der Abbildung $(y,z)\mapsto f(p,y,z)$ sei im Punkt (q,r) invertierbar. Dann kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden.

11. Sei $I=(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Betrachten Sie eine Differentialgleichung von der Form

$$x'(t)=p(t)x(t)+q(t),$$

bei der $p,q:I\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen sind und q nicht die Nullfunktion ist. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets wahr (**W**) oder (in manchen Fällen) falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W	**F**	
⊠	□	Zu jeder Anfangsbedingung $x(t_0)=x_0$ für $t_0\in I$ existiert genau eine Lösung $x:I\to\mathbb{R}$.
□	⊠	Die Summe von zwei Lösungen $x_1,x_2:I\to\mathbb{R}$ ist wieder eine Lösung der Differentialgleichung.
⊠	□	Die Menge aller Lösungen $x:I\to\mathbb{R}$ bildet einen affinen Raum.

Erläuterung:

1) (Satz Seite 653, altes Format)

2) Gegenbeispiel: Die allgemeine Lösung der DGL $x'=\frac{1}{t}x+1$ ist von der Form $x(t)=t(\ln t+x_0)$. Addiert man $t\mapsto t\ln t$ und $t\mapsto t\ln t+1$, so gilt für die Summe y, dass $y'=\frac{1}{t}y+2$ ist.

3) (Satz Seite 664, altes Format für $n=1$)

12. *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen:*

$$x' = tx^2 + t, \quad x(0) = 1$$

Lösung

$$x' = tx^2 + t \Leftrightarrow x' = t(x^2 + 1)$$

Wir verwenden jetzt die Methode

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = tdt$$

und rechnen

$$\frac{t^2}{2} + c = \int tdt = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan(x(t)).$$

Nach dem Satz aus der Vorlesung (Seite 616, altes Format) ist demnach

$$x(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + c\right).$$

Also folgt mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$:

$$c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad x(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$