Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 41-46 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 21.01.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 41:(*2+3+3+4 Punkte*)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{K}$-linear? (Beweis oder Gegenbeispiel)

a)
$$f_1 : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \to x \cdot y$$

b)
$$f_2 : \mathrm{Abb}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^2, \quad f \to (f(-1), f(1))$$

c)
$$f_3 : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x], \quad f(x) \to (x^2+1) \cdot f(x)$$

d)
$$f_4 : (\mathbb{K}^3)^* \to \mathbb{K}, \quad \varphi \to \varphi(1,1,1)$$

Aufgabe 42:(*5 Punkte*)
Gegeben seien die folgenden drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte zwischen Paaren dieser drei Matrizen.

Aufgabe 43:(*4 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$f(1,2,3) = (2,0,1,2), \quad f(-3,2,1) = (0,1,1,2), \quad f(1,0,1) = (-1,-1,1,-1).$$

Bestimmen Sie $f(8,2,8)$.

bitte wenden

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde

Aufgabe 44:(*5 Punkte*)
Sei B
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Elemente der dualen Basis B^* von B als Linearkombinationen der Elemente der Standardbasis $E^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ an.

Aufgabe 45:(*4 Punkte*)
Sei $\varphi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ die lineare Abbildung gegeben durch
$$\varphi(a, b, c, d) = (a + b - c, 2b - c + d, -a + b + c, d)$$
und B die Basis
$$B = (e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_4).$$
Berechnen Sie $M_B^B(\varphi)$.

Aufgabe 46:(*4+4+2 Punkte*)
Seien V und W Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Beweisen Sie:

a) φ ist genau dann injektiv, wenn $(\varphi(v_i))_i$ linear unabhängig ist.

b) φ ist genau dann surjektiv, wenn $(\varphi(v_i))_i$ ein Erzeugendensystem von W ist.

c) φ ist genau dann bijektiv, wenn $(\varphi(v_i))_i$ eine Basis von W ist.