Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 23-27 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 10.12.2010.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 23:(*10 Punkte*)
Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion f auf der Kreisscheibe $\overline{B_R(0)} := \{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.
Hinweis: Benutzen Sie zweimal den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 24:(*5 Punkte*)
Seien $a > 1$ und $b > 0$ reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0$$

Aufgabe 25:(*4+6 Punkte*)
Berechnung der Eulerschen Zahl als Grenzwert einer Folge.
a) Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

b) Benutzen Sie **a)** und die Definition der Exponentialfunktion, um zu beweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1)$$

Aufgabe 26:(*3+3+4 Punkte*)
Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar in 0? Beweisen Sie Ihr Resultat.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \sin x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für} \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{für} \quad x \neq 0, \quad h(0) = 0$

Aufgabe 27:(*5 Punkte*)
Beweisen Sie:

$$\cos' = -\sin$$

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde