Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 17-22 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 03.12.2010.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 17:(*4 Punkte*)
Sei
$$M = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$
Bestimmen Sie $\inf(M), \sup(M)$ und, falls vorhanden, $\min(M), \max(M)$ (mit Beweis).

Aufgabe 18:(*4+4+6 Punkte*)
Bestimmen Sie die maximalen Teilmengen von $\mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen jeweils stetig sind. Beweisen Sie Ihr Resultat.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^5 - 1} \quad \text{für} \quad x \neq 1, \quad g(1) = \dfrac{3}{5}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \dfrac{x(x - x^2)}{x^2 - 1} \quad \text{für} \quad x \neq \pm 1, \quad h(-1) = h(1) = 1$

Aufgabe 19:(*8+4 Punkte*)
Betrachten Sie die stetigen Funktionen
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}.$$
a) Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert l_x konvergiert, wobei
$$l_x = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}.$$
b) Wir definieren nun eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = l_x$. In welchen Punkten ist f stetig?

Aufgabe 20:(*2+3 Punkte*)
Sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x) - \frac{5}{4}.$$
a) Beweisen Sie, dass f stetig ist.

b) Beweisen Sie, dass f im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle hat.

bitte wenden

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde

Aufgabe 21:(*5 Punkte*)
Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aufgabe 22:(*Zusatzaufgabe 10 Punkte*)
Jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ läßt sich in eindeutiger Weise als

$$q = \frac{a}{b} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

und a, b teilerfremd darstellen. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{b} & \text{für} \quad x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a, b \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f in allen $x \notin \mathbb{Q}$ stetig und in allen $x \in \mathbb{Q}$ nicht stetig ist.