Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 5-8 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 12.11.2009.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 5:(*2+2+3+3 Punkte*)
Drücken Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gestalt $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ aus:

$$(3+2i)^3, \quad \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad (1+3i)^3 - (1-3i)^3, \quad \frac{(1-i)}{(2+2i)^2}$$

Aufgabe 6:(*4+3+3 Punkte*)
a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass für jede Nullstelle ζ von $x^n - 1$ gilt:

$$|\zeta| = 1$$

b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $x^2 + i$.
c) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

Aufgabe 7:(*4+6 Punkte*)
Beweisen Sie:
a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + n^5 + 7n^2}{2n^6 + 7n^3 + 12} = \frac{1}{2}$$

b) Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit $x_n \le y_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aufgabe 8:(*10 Punkte*)
Sei (x_n) die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n).$$

Beweisen Sie, dass diese Folge den Grenzwert $\frac{2}{3}$ hat.
Hinweis: Beweisen Sie ähnlich zu Aufgabe 4 mit vollständiger Induktion, dass

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-\frac{1}{2})^k$$

für $n > 0$. Wenden Sie die Geometrische Summenformel an. Dann dürfen Sie benutzen, dass

$$\lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0.$$

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde