Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Klausur

Mathematik für Physiker I
WS 2010/11

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle schriftlichen Unterlagen inklusive Büchern, Notizen, Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

---

von den Korrektoren auszufüllen:

____

Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	10	8	10	8	8	8	10	8	8

11	12
8	6

$\boxed{\sum :\qquad}$

1. *Skizzieren Sie die Menge*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}((2+i)z) \leq 1\}$$

in der komplexen Zahlenebene. *8 Punkte*

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Damit folgt

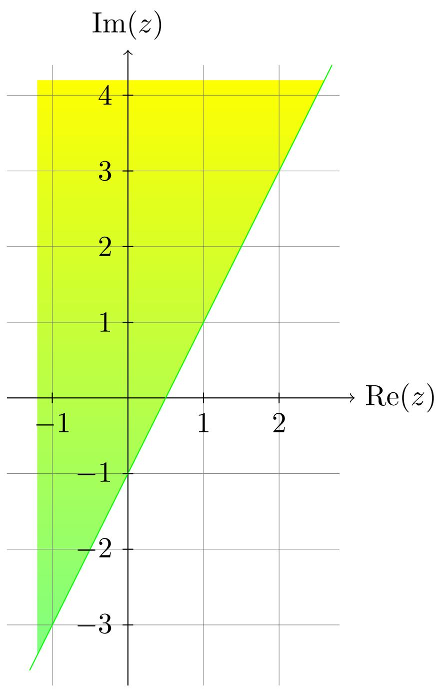
$$\mathrm{Re}((2+i)z) = 2x - y.$$

Also gilt

$$\mathrm{Re}((2+i)z) \leq 1 \Leftrightarrow 2x - y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 2x - 1$$

Also kann die Menge durch das folgende Bild skizziert werden:

Begrenzung Gerade: 4 Punkte
Halbraum: 2 Punkte
korrekte Steigung: 2 Punkte



2. *Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ gilt:*

$$n^7 \leq 7^n$$

10 Punkte

Induktionsanfang:
$n = 7$: *2 Punkte*

$$n^7 = 7^7 = 7^n$$

Induktionsvoraussetzung: *2 Punkte*
Es gelte $n^7 \leq 7^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$.

Induktionsschritt: Nach Induktionsvoraussetzung folgt

2 Punkte

$$(n+1)^7 = (1 + \frac{1}{n})^7 n^7 \leq (1 + \frac{1}{n})^7 7^n.$$

Wegen $n \leq 7$ folgt *3 Punkte*

$$(1+\frac{1}{n})^7 \leq (1+\frac{1}{7})^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} \left(\frac{1}{7}\right)^i = \sum_{i=0}^{7} \frac{7 \cdot \ldots \cdot (7-i+1)}{i!7^i}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{7} \frac{7^i}{i!7^i} = \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!} < 2 + \sum_{i=2}^{7} \frac{1}{2} = 5 < 7.$$

Also gilt *1 Punkt*

$$(1+\frac{1}{n})^7 7^n = 7 \cdot 7^n = 7^{n+1}.$$

3. *Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)* *8 Punkte (je 2 Punkte)*

W	**F**	
☐	☒	$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^4+n^2}{n^7-1} = 1$
☒	☐	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ konvergiert nicht.
☐	☒	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ konvergiert.
☒	☐	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

(*Anmerkungen:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^4+n^2}{n^7-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5})}{n^7(1-\frac{1}{n^7})} = 0$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ *konvergiert nicht, da die Summanden keine Nullfolge bilden* ($\forall n : \frac{n+1}{n} \geq 1$)*.*

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ *konvergiert nicht nach dem Majorantenkriterium, da* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *nicht konvergiert und* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ *konvergiert nach dem Leibnizkriterium.*)

4. *Seien* $(x_n)_n$ *und* $(y_n)_n$ *Folgen in* $\mathbb{C}$ *und* $x, y \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| < 1$ *und* $|y| < 5$. *Ferner sei* $N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$|x_n - x| < \frac{1}{10}, \quad |y_n - y| < \frac{1}{5} \quad (\forall n \geq N).$$

Beweisen Sie: *10 Punkte*

$$|x_n y_n - xy| < 1 \quad (\forall n \geq N).$$

Mit Hilfe der Voraussetzungen schätzt man ab:

$$|x_n y_n - xy|$$

4 Punkte

$$= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy|$$

2 Punkte

$$\leq |x_n y_n - x y_n| + |x y_n - xy|$$

2 Punkte

$$= |y_n| \cdot |x_n - x| + |y_n - y| \cdot |x|$$

2 Punkte

$$< (5 + \frac{1}{5})\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{36}{50} < 1$$

5. *Die Funktion $f : [-6, 9) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = 2 + |1 - x^2|$ definiert. Geben Sie alle Stellen an, in denen f ein lokales Minimum annimmt.* *8 Punkte*

   Die Funktion f nimmt an den Stellen ± 1 ein lokales Minimum an, da $f(\pm 1) = 2$ und $f(x) = 2 + |1 - x^2| \geq 2$. *2 Punkte*

   Weiter gilt

   $$f'(x) = -2x \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

   Damit ist $f'(x) > 0$ für $-1 < x < 0$ und $f'(x) < 0$ für $1 > x > 0$. Also liegt zwar ein lokales Maximum an der Stelle 0 vor, aber es gibt im Bereich $(-1, 1)$ keine Stelle, an denen f ein lokales Minimum annimmt.

   Analog gilt

   $$f'(x) = 2x \quad \text{für} \quad |x| > 1.$$

   Damit ist $f'(x) < 0$ für $x < -1$. Also liegt am Randpunkt -6 ein lokales Maximum vor. Es ist aber kein weiteres lokales Minimum vorhanden.
   Also sind ± 1 die einzigen Stellen, an denen f ein lokales Minimum annimmt.

   Idee f' für $|x| \neq 1$ betrachten: 2 Punkte korrekte Angabe von f': 2 Punkte

   Randpunkte: 2 Punkte

6. *Beweisen Sie nur mit Hilfe der (Folgen-) Definition der Stetigkeit, dass* *8 Punkte*

   $$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \bar{z}$$

   stetig ist. (Sie dürfen die in der Vorlesung etablierten Eigenschaften für konvergente Folgen benutzen.)

   Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $(z_n)_n$ mit $z_n = x_n + y_n \in \mathbb{C}$ eine Folge mit $\lim z_n = z$. Damit folgt

   Zerlegung in $\mathrm{Im}(z)$ *und* $\mathrm{Re}(Z)$*: 2 Punkte*

   $$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - iy_n) = x - iy = f(z).$$

   4 Punkte

   Also ist f stetig in z. Da $z \in \mathbb{C}$ beliebig, ist f stetig. *2 Punkte*

7. *Berechnen Sie die Ableitung f' von* *8 Punkte*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\exp(-ax^2)}{1+bx^2}.$$

$$f'(x) = \frac{-2ax\exp(-ax^2)(1+bx^2) - 2bx\exp(-ax^2)}{(1+bx^2)^2}$$

8. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Beweisen Sie mit Hilfe der Monotonie des Integrals, dass* *10 Punkte*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Es gibt zwei Fälle. Entweder hat man *Fallunterscheidung: 3 Punkte*

$$\int_a^b f \geq 0 \quad \text{oder} \quad \int_a^b f < 0.$$

Also haben wir entweder *2 Punkte*

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b f \quad \text{oder} \quad \left| \int_a^b f \right| = -\int_a^b f = \int_a^b -f.$$

Wegen *2 Punkte*

$$\pm f(x) \leq |f(x)| \quad (\forall x \in [a, b])$$

gilt $\pm f \leq |f|$. Also folgt mit der Monotonie des Integrals in jedem Fall *3 Punkte*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

9. *Berechnen Sie eine Stammfunktion von* *8 Punkte*

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + x)\ln(x)$$

mit Hilfe von partieller Integration.

$$\int (x^2 + x)\ln(x)dx = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln(x) - \int (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln'(x)dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln(x) - \int (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\frac{1}{x}dx = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln(x) - \int (\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x)dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2.$$

10. *Sei $A \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix* *8 Punkte*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Eine Zeilenstufenform der Matrix $(A|b)$ ist*

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie kurz!

a) *Die Lösungsmenge $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ der Dimension 1.*

b) *$Ax = b$ hat genau eine Lösung.*

c) *Es existiert ein $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $Ax = c$ keine Lösung hat.*

Die Aussagen **a)** und **b)** sind falsch, da das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ die Lösungsmenge

korrekte Antwort jeweils 1 Punkt

$$\mathbb{L} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

hat. (Dies braucht nicht angegeben zu werden, es reicht der Hinweis darauf, dass aus der Zeilenstufenform $\dim \ker A$ als $4 - 2 = 2$ abgelesen werden kann). Also gilt $\dim \mathbb{L} = 2$.

Begründung **a), b)***: 3 Punkte*

Die Aussage **c)** ist richtig. Zum Beispiel kann man den Vektor b so verändern, so dass man an Stelle von A' die Matrix

Begründung **c)***: 2 Punkte*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

erält. Die Lösungsmenge ist auf Grund der 3. Zeile leer.

11. *Sei V ein 8-dimensionaler Vektorraum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Bewertung wie in Aufgabe 3.)*

8 Punkte (jeweils 1 Punkt)

W	**F**	
☒	☐	9 Vektoren sind stets linear abhängig.
☐	☒	9 Vektoren erzeugen stets ganz V.
☐	☒	Wenn 6 beliebige Vektoren gegeben sind, kann man immer 2 weitere finden, so dass sie zusammen eine Basis bilden.
☒	☐	Jedes linear unabhängige System aus 8 Vektoren bildet eine Basis.
☒	☐	Jede Basis eines Untervektorraums $U \subset V$ lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

☐ ☒ Wenn ein Unterraum $U \subset V$ und eine Basis (v_i) von V gegeben sind, dann kann man eine Basis von U finden, indem man geeignete Vektoren v_i auswählt.

☒ ☐ Ein von 5 Vektoren aufgespannter Unterraum von V hat immer Dimension kleiner oder gleich 5.

☐ ☒ Ein von 5 Vektoren aufgespannter Unterraum von V hat immer Dimension größer oder gleich 5.

12. *Bestimmen Sie* σ^{1001} *für* *6 Punkte*

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5.$$

Da $\sigma^5 = \mathrm{id}$, folgt $\sigma^{1000} = (\sigma^5)^{200} = \mathrm{id}^{200} = \mathrm{id}$, und daher

$$\sigma^{1001} = \sigma^{1000} \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma.$$