Gerhard Hübner, Univ. Hamburg, Fakultät 6,
Dpt. Mathematatik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 5: Abgabe der Hausaufgaben am Do 18. 05. 06

Aufgabe P 6.1 (Präsenzaufgabe):
Gegeben sei die Stochastische Differentialgleichung
$dX_t = g(t)X_t\,dt + c(t)\,dB_t\,.$
Unter welchen Voraussetzungen lässt sich diese als Spezialfall der SDG aus Aufg. H 6.1 darstellen – und mit welchen Funktionen a und b?

Aufgabe P 6.2 (Präsenzaufgabe):
Was ist ein Bedienungs-System M|M|1|∞ – in diskreter und stetiger Zeit? Stationäre Verteilung? Ankunft unabhängig vom Zustand? Abgang unabhängig vom Zustand? Verweilzeit? Satz von Little?

Aufgabe H 6.1: Lösen Sie die folgende Verallgemeinerung der Ornstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung:

$$dX_t = a'(t)/a(t)\,X_t\,dt + a(t)\,b(t)\,dB_t \quad \text{mit} \quad a(t)>0\,,\ a(0)=1\,,$$

(analog zu Aufg. H 5.3) durch einen Ansatz $Z_t := u(t)\,X_t\,.$
Zur Kontrolle hier die Lösung: $X_t = a(t)(X_0+\int_0^t b(s)\,dB_s)\,.$

Aufgabe H 6.2:
(a) Lösen sie mit Hilfe von Aufg. H 6.1 die folgende Differentialgleichung:

$$dX_t = -(1-t)^{-1}X_t\,dt + dB_t\,,\ \ t\in[0,1) \ \text{ mit } \ X_0=0\,.$$

(b) Zeigen Sie dass X_t normal-verteilt ist $(\forall\, t)$, und bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X_t..

Zur Kontrolle: $X_t = \ldots \int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s.$

Aufgabe H 6.3:
Für eine Telefon-Auskunft gebe es zwei Auskunftstellen und keine Warteplätze. Modellieren Sie dieses System als Markov-Bedienmodell in diskreter Zeit mit folgenden Übergangs-Wahrscheinlichkeiten:

$$p_{01} = 0.4,\ p_{10} = 0.3,\ \ p_{02} = 0.2,\ p_{20} = 0.2,\ \ p_{12} = 0.3,\ p_{21} = 0.2.$$

(a) Bestimmen Sie die/eine stationäre Verteilung.
(b) Ist das System (im Gleichgewicht) reversibel?
(c) Für welchen Wert von p_{20} (sonst wie oben) liegt Reversibilität vor?
(d) Wie lautet dann die stationäre Verteilung?