

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 5: Abgabe der Hausaufgaben am Do 11.05.06

Aufgabe P 5.1 (Präsenzaufgabe):

Bestimmen Sie die Stratonovich-Dgl. zur Itô-Dgl. $dY_t = \frac{1}{3} Y_t^{1/3} dt + Y_t^{2/3} dB_t$.
Haben Sie eine Vermutung für die Lösung?

Aufgabe P 5.2 (Präsenzaufgabe):

Berechnen Sie mit Hilfe der Itô-Formel dY_t für

(a) $Y_t = e^{\alpha t} X_t$ mit $dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dB_t$,

(b) $Y_t = Y_0 e^{\sigma B_t}$ ($dX_t = dB_t$).

Suchen Sie jeweils eine Darstellung der Form

$$dY_t = a(t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dB_t .$$

Aufgabe H 5.1: Lösen Sie (mit Hilfe des Stratonovich-Integrals)
die folgende Itô-Dgl.: $dX_t = [\alpha b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t)] dt + b(X_t) dB_t$.

Zur Kontrolle die Lösung: $X_t = h^{-1}(\alpha t + B_t + h(X_0))$,

wenn $h(x)$ die Stammfunktion zu $1/b(x)$ ist.

Aufgabe H 5.2:

(a) Lösen Sie (mit Hilfe des Stratonovich-Integrals)
die folgende Itô-Differentialgleichung:

$$dX_t = r X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

(b) Interpretieren Sie die Dgl. als Verhalten eines Aktienkurses.

(c) Berechnen Sie EX_t (mit Hilfe von Aufg. H 2.2).

Aufgabe H 5.3:

Lösen Sie die „Ohrnstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung“

$$dX_t = -\alpha(X_t - m) dt + \beta dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

indem Sie die entsprechende Dgl. für $Z_t := e^{\alpha t}(X_t - m)$ ($= f(t, X_t)$) lösen.