Gerhard Hübner, Univ. Hamburg, Fakultät 6,
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 4: Abgabe der Hausaufgaben am Do 04. 05. 06

Aufgabe P 4.1 (Präsenzaufgabe):

Sei (B_t) der Brownsche Prozess, $A>0$ und $\tau_A := \inf\{t\colon B_t \geq A\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\tau_A < \infty$ P-f.s.

(b) Bestimmen Sie $EB_{t\wedge\tau_A}$, $\lim_{t\to\infty} B_{t\wedge\tau_A}$ und EB_{τ_A} .

(c) Vergleichen Sie EB_{τ_A} mit $EB_{\tau_{AB}}$ von Aufg. H 2.1 .
Warum kann der dortige Beweis nicht hierher übertragen werden?

Aufgabe P 4.2 (Präsenzaufgabe):

Es sei $X_t := \int_0^t s^2\, dB_s$.
Bestimmen Sie die Varianz von X_t .

Aufgabe H 4.1:

Zeigen sie mit Hilfe der Itô-Formel, dass das Martingal
$(M_t := \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)$
die Darstellung $M_t = \int_0^t \alpha M_t\, dB_t$ besitzt.

Aufgabe H 4.2:

Es sei (B_t) ein Brownscher Prozess. Zeigen Sie:
Die Zufallsvariable $Y := \int_0^1 B_t\, dt$ ist $\mathcal{N}(0, 1/3)$-verteilt.

Hinweis:

1. Benutzen Sie eine Darstellung von Y als Limes einer (geeigneten) Folge von Riemann-Summen Y_N und berechnen Sie deren Verteilung.
2. Beachten Sie, dass die Verteilung einer Summe von $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$-verteilten ZV X_i nur dann einfach anzugeben ist, falls die X_i stoch. unabhängig oder gleich sind. Fassen Sie deshalb gleiche Zuwächse zusammen.

Aufgabe H 4.3:

Berechnen Sie mit Hilfe der Ito-Formel dY_t für

(a) $Y_t = (B_t/3)^3$ $\qquad (dX_t = dB_t)$,

(b) $Y_t = \ln(1 + B_t)$ $\qquad (dX_t = dB_t)$,

Suchen Sie jeweils eine Darstellung der Form

$$dY_t = a(t, Y_t)\, dt + b(t, Y_t)\, dB_t \ .$$