Gerhard Hübner, Univ. Hamburg, Fakultät 6,
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 1: Abgabe der Hausaufgaben am Do 20. 04. 04

Aufgabe P 2.1 (Präsenzaufgabe):
Zeigen Sie, dass für eine integrierbare ZV Z auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ gilt:

$$||E(Z \,|\, \mathcal{C})||_1 \leq ||Z\,||_1.$$

Aufgabe P 2.2 (Präsenzaufgabe):
Es sei $(B_t,\, t \geq 0)$ ein Brownscher Prozess, und es sei

$$\tau_{AB} := \min\{n \colon B_t = A \text{ oder } -B\} \quad \text{mit } A, B > 0.$$

Zeigen Sie (auf zwei Wegen?), dass $\tau_{AB} < \infty$ P-f.s.
Man kann z.B. die Ereignisse $E_n := \{B_{n+1} - B_n < A + B\}$ betrachten.

Aufgabe H 2.1: (Fortsetzung von Aufgabe P 2.2)
Es sei $(B_t,\, t \geq 0)$ ein Brownscher Prozess, und es sei

$$\tau := \tau_{AB} := \min\{n \colon B_t = A \text{ oder } -B\} \quad \text{mit } A, B > 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $P(B_\tau = A) = \frac{B}{A+B}$. Betrachten Sie dazu B_τ und $B_{t\wedge\tau}$ und zeigen Sie $|B_{t\wedge\tau}| \leq A+B$, sowie $EB_\tau = 0$.

(b) Zeigen Sie für das Martingal $M_t = {B_t}^2 - t$: (b1) $|M_{t\wedge\tau},| \leq A^2 + B^2 + \tau$, (b2) $E(M_{t\wedge\tau}) = 0$, und damit (b3) $E(\tau) = E({B_\tau}^2)$ und (b4) $E(\tau) = AB$.

Aufgabe H 2.2: Zeigen Sie für einen Brownschen Prozess (B_t), dass $M_t := \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)$ ein Martingal ist.
Zeigen Sie dazu $E\, e^{\alpha B_u} = e^{\alpha^2 u/2}$.

Aufgabe H 2.3: Zeigen Sie:
Ist (Z_n) gleichgradig integrierbar* und konvergiert (Z_n) P-f.s. gegen Z, dann konvergiert (Z_n) auch in $\mathcal{L}^1$-Norm gegen Z.

* äquivalente Definition: Die Familie $(X_i,\; i \in I)$ ist gleichgradig integrierbar, wenn $\varrho(x) := \sup_i E(|X_i| 1_{\{|X_i|>x\}}) \to 0$ für $x \to \infty$.

Hinweise: (1) Zeigen Sie mit ‚Fatou' $E(|X_i| 1_{\{|X_i|>x\}}) \leq \varrho(x)$ und damit $E(|Z\,|) \leq \varrho(x) + x$.

(2) Zeigen Sie $\limsup_n E(|Z_n - Z\,|) \leq 2\varrho(x)$ durch die Abschätzung

$$|Z_n - Z\,| \leq |Z_n - Z\,| 1_{\{|Z_n \leq x\}} + |Z\,| 1_{\{|Z_n \leq x\}} + |Z_n| 1_{\{|Z_n \leq x\}}$$

mit entspr. Konvergenz-Sätzen.