

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 10: Abgabe der Hausaufgaben am Do 29. 6. 06

Aufgabe P 10.1 (Präsenzaufgabe):

Behandeln Sie zu Aufg. H 10.2: FCFS und SIRO (service in random order).

Aufgabe H 10.1:

Gegeben sei ein zyklisches Bediensystem mit J $M|1$ -Stationen, den Bedienraten μ_1, \dots, μ_J und N Kunden. Der Zustandsraum sei \mathcal{S}_N . Zeigen Sie:

- (a) Die stationäre Verteilung ist $(\pi(\mathbf{n}))$ mit $\pi(\mathbf{n}) = B_N \mu_1^{-n_1} \cdots \mu_J^{-n_J}$.
Hinweis: Bei den Werten α_j kommt es auf einen Faktor c nicht an.
Zahlenwerte für $J=3$, $\mu_1=1/4$, $\mu_2=1/3$, $\mu_3=1/2$ und $N=1, 2, 3$.
- (b) (b1) Im Gleichgewicht ist die W., dass Station j nicht leer ist,
 $P(N_j(t) > 0) = B_N / (B_{N-1} \mu_j)$. Vergleichen Sie dazu die in \mathcal{S}_N zu berücksichtigenden Zustände mit den Zuständen aus \mathcal{S}_{N-1} .
(b2) Aus (b1) folgt: Die Abgangsrate ist bei allen Stationen B_N / B_{N-1} – unabhängig von j .
- (c) Bestimmen Sie (aus (a)) die stationäre Verteilung $\hat{\pi}_{(n_2, \dots, n_J)}^{(N)}$ für die Stationen 2 bis J . Verwenden Sie dazu $\rho_j := \mu_1 / \mu_j$. (Zustandsraum?)
Wie verhält sich das Gesamtsystem für $N \rightarrow \infty$, falls $\mu_j > \mu_1$ für alle $j \geq 2$?
Zeigen Sie, dass dann $\hat{\pi}_{(n_2, \dots, n_J)}^{(N)}$ gegen $\prod_{j=2}^J (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$ konvergiert.

Zusatzfrage: Haben Sie eine plausible Erklärung für das Ergebnis von (c)?

Aufgabe H 10.2:

Bestimmen Sie für eine einzelne Bedienstation mit K Bedienern und für die i. Folg. beschriebenen Bedienungs-Regeln die Positions-Zuordnungsfunktion δ und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Die Kunden auf den Positionen 1 bis K werden jeweils mit gleicher Intensität μ bedient. (Damit sind die Funktionen γ und φ festgelegt.)

- (a) **LCFS o.U.** (ohne Unterbrechung): Sind alle Bediener beschäftigt, muss ein ankommender Kunde warten. Sobald ein Bediener frei wird, beginnt für den **zuletzt** angekommenen Kunden die Bedienung.
- (b) **LCFS m.U.** (mit Unterbrechung): Sobald ein Kunde ankommt, wird mit seiner Bedienung begonnen. Ist kein Bediener frei, wird die z.Zt. am längsten andauernde Bedienung unterbrochen und bei Freiwerden eines Bedieners als erste wieder aufgenommen.