Stochastische Prozesse II

2 Stochastische Netzwerke: Migrationsprozesse

2.4 Offene Migrationsprozesse: Jackson-Netze

Im Vergleich zu 2.3 gibt es (1) bel. viele Kunden, (2) Zugänge und Abgänge von „außen“.
Zur Vereinfachung: „außen“ = Station 0 $\Rightarrow$ Bezeichnungen aus 2.3 mit folg. Änderungen:
$n_0 = \infty$, $\phi_0(\infty) = \phi_0$, $\mathcal{S} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J),\ n_j \geq 0\}$ (keine feste Kd-Zahl „im System“).
$\Rightarrow \phi_0\, \lambda_{0k}$ ist Ankunftsrate *von* „außen“ *nach* Station k (bei Kelly ν_k),
λ_{j0} ist Abgangs-W. *nach* „außen“ *von* Station j (bei Kelly μ_j).

Wie bisher: **Übergänge:** $\mathbf{n} \mapsto T_{jk}\mathbf{n}$: $n_j \mapsto n_j - 1$, $n_k \mapsto n_k + 1$, $j, k \in I_0 := \{0, 1, \dots, J\}$,
Ü-Raten: $q_{\mathbf{n}, T_{jk}\mathbf{n}} = \phi_j(n_j)\, \lambda_{jk}$ $(\lambda_{jj} = 0,\ \sum_k \lambda_{jk} = 1)$, $j, k \in I_0$,
Annahmen: $\phi_j > 0$ für $n > 0$, I_0 mit Ü-W. λ_{jk} ist irreduzibel.
eind. stat. Vert. auf I_0 mit $\alpha_j > 0$ und $(\alpha_j =)\ \alpha_j \sum_{k=0}^{J} \alpha_k\, \lambda_{kj}$, $j, k \in I_0$ (2.9)

Statt $\sum \alpha_j = 1$ setzen wir $\alpha_0 = \phi_0 \Rightarrow$ (2.9) (vgl. Kelly, dort $\nu_k = \phi_0 \lambda_{0k}$, $\mu_j = \lambda_{j0}$).
Dann ist α_j die Gesamt-Ankunfts-/Abgangsrate an Station j (Rate = langfrist. Durchschnitt).
(Bem.: 1 Zeile in (2.9) ist überflüssig wg. hom. Gl.-System (Kelly benutzt $j = 0$ erst später.

Theorem 2.4. Vorauss. wie oben. Dann ex stat. Vert. $(\pi_{\mathbf{n}})$ für $N(t)$,

$$\pi_{\mathbf{n}} = \prod_{j=1}^{J} \pi_j(n_j) = \prod_{j=1}^{J} b_j\, \frac{\alpha_j^{n_j}}{\phi_j(1) \dots \phi_j(n_j)}, \qquad \text{falls } b_j^{-1} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^{n_j}}{\phi_j(1) \dots \phi_j(n_j)} < \infty\ \forall j \tag{2.10}$$

Folgerung: Falls $N(t)$ stat., dann ist $N_1(t_0), \dots, N_J(t_0)$ st.u., weil (2.10) e. Prod.-Dichte ist.

Folgerung: $N(t)$ ist reversibel, falls stationär **und** falls $\alpha_j \lambda_{jk} = \alpha_k \lambda_{kj}$.

Theorem 2.5: Wenn $N(t)$ ein stat. Migrations-Prozess ist, dann auch $N(-t)$.

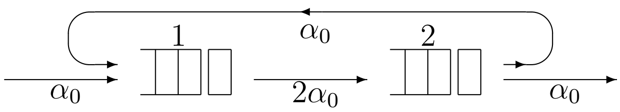
Beweis: Ü-Raten zu $N(-t)$ mit Th. 1.12: $q'_{\mathbf{n}, T_{jk}\mathbf{n}} = \phi_j(n_j)\, \lambda'_{jk}$ mit $\lambda_{jk} = \alpha_k \lambda_{kj} / \alpha_j$ $j \in J$.

Folgerung 2.6: $N(t)$ stat. Migr.Proz. $\Rightarrow$ die Abgangsprozesse von j nach 0 sind st.u. PP$(\alpha_j \lambda_{j0})$
und $N_(t_0)$ ist st.u. von diesen Abgangsprozessen **vor** t_0.

Beweis mit Zeitumkehrung und Th 2.5. (Ank.Prozesse von 0 nach j sind st.u. PP.)

Bemerkung: Die Abgangsprozesse von j nach k $(\neq 0)$ sind i.Allg. **keine** Poisson-Prozesse.

Beispiel:



Abg.Proz. von 2 ist kein P.P.,
aber Abg.Proz. v. 2 nach 0 (Übg.).

Folgerung 2.7: $N(t)$ stat. $\Rightarrow$ Verweilzeit in M|M| $s \mid \infty$-Station j hat die gleiche Verteilung wie bei e. isolierten M|M| $s \mid \infty$-Station mit Ank.-Rate α_j, **und** ein abgehender Kunde hinterlässt die Station in stat. Vert. $(\pi_j(n_j))$, ein ank. Kunde findet sie in dieser Vert.

Beweis: Erst (b): W-Rate(Kunde verlässt j, hinterlässt n_j) $= \pi_j(n_j + 1)\, \phi_j(n_j + 1)$
$\Rightarrow$ bed. W.$(\dots n_j \mid \text{Abg.}) = \pi_j(n_j + 1)\, \phi_j(n_j + 1) / (\sum_0^\infty \dots) = \pi_j(n_j)$ (nachr.!) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Bemerkung: Modell auch mit $J = \infty$, falls $B := b_1 b_2 \dots > 0$ $(b_j < 1)$.
Im Gleichgewicht ist dann die Gesamt-Kundenzahl endlich. (Übg.)