Stochastische Prozesse II

Itô-Integrale und Stochastische Differentialgleichungen

Nachtrag: Beweis zur Stratonovich-Korrektur

Zu zeigen ist die Gleichheit der Itô-Differentialgleichung $dX_t = a(t, X_t)\,dt + b(t, X_t)\,dB_t$ (1′) und der Statonovich-Differentialgleichung

$dX_t = a(t, X_t)\,dt - \frac{1}{2}\,b(t, x)\,b_x(t, X_t)\,dt + b(t, X_t) \circ dB_t$ (2′) (mit $b_x := \partial b/\partial x$ usw.).

Es bleibt zu zeigen: $\int b(t, X_t) \circ dB_t = \int b(t, X_t)\,dB_t + \int \frac{1}{2}\,b(t, X_t)\,b_x(t, X_t)\,dt$.

Approximation der linken Seite durch eine Summe ergibt

$\int b(t, X_t) \circ dB_t = \sum_{n=0}^{N-1} b(t_n + \frac{1}{2}\,\Delta t_n, X_{t_n+\frac{1}{2}\Delta t_n})\Delta B_{t_n}$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, $\Delta B_{t_n} = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$.

Durch **Taylor-Entwicklung** folgt mit $\Delta' X_{t_n} := X_{t_n+\frac{1}{2}\Delta t_n} - X_{t_n}$ analog zum stoch. Differential

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[b(t_n, X_{t_n}) + b_t(t_n, X_{t_n})\,\tfrac{1}{2}\,\Delta t_n + b_x(t_n, X_{t_n})\Delta' X_{t_n} \right] \Delta B_{t_n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} b(t_n, X_{t_n})\,\Delta B_{t_n} + \sum_{n=0}^{N-1} b_t(t_n, X_{t_n})\,\tfrac{1}{2}\,\Delta t_n\,\Delta B_{t_n} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{n=0}^{N-1} b_x(t_n, X_{t_n})\,a(t_n, X_{t_n})\,\tfrac{1}{2}\,\Delta t_n\,\Delta B_{t_n} + \sum_{n=0}^{N-1} b_x(t_n, X_{t_n})\,b(t_n, X_{t_n})\,\Delta' B_{t_n}\,\Delta B_{t_n}.$$

Dabei ist $\Delta' B_{t_n} := B_{t_n+\frac{1}{2}\Delta t_n} - B_{t_n} = \frac{1}{2}\,\Delta B_{t_n} + \Big(B_{t_n+\frac{1}{2}\Delta t_n} - \frac{1}{2}(\,B_{t_n} + B_{t_{n+1}}) \Big)$.

Der erste Term konvergiert gegen $\int b(t, X_t\,dB_t$ (wie erwartet), der zweite und dritte Term geht jeweils wegen $\Delta t_n\,\Delta B_{t_n}$ gegen 0, wie bei der Itô-Formel. Im letzten Term kann wie beim Itô-Formel-Beweis $(\Delta B_{t_n})^2$ durch Δt_n ersetzt werden. Dann konvergiert er gegen $\int \frac{1}{2}\,b_x(t, X_t)\,b(t, X_t)\,dt$, den „Stratonovich-Term“. Die große Klammer ist von ΔB_{t_n} st.u. mit Erwartung 0, das Produkt mit ΔB_{t_n} verschwindet also. □

Der **Ornstein-Uhlenbeck-Prozess**, ein stationärer Itô-Prozess.

Ornstein und Uhlenbeck wollten die Geschwindigkeit von Molekülen in Gasen modellieren: Störung durch Stöße mit konstanter Intensität βdB_t, Rückführung auf einen mittleren Wert durch Stöße proportional zur Abweichung $-\alpha(X_t - m)$.

Die stoch. **Differentialgleichung** $\boxed{dX_t = -\alpha(X_t - m)dt + \beta dB_t}$

hat die **Lösung** $\boxed{X_t = m + (X_0 - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}$. (s. Übg.)

Interpretation der Lösung:

Anfangsauslenkung $X_0 - m$ und die Störungen (βdB_s) (zur Zeit s) klingen exponentiell ab.

Langzeit-Stationarität? Bei $X_0 \sim \mathcal{N}(c, \sigma^2)$ hat X_t eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$ mit $\mu = m + (c - m)e^{-\alpha t}$ und $\tau^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t} + \beta^2 e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{\beta^2}{2\alpha} + (\sigma^2 - \frac{\beta^2}{2\alpha})e^{-2\alpha t}$.

Stationarität? Für $c = m$ und $\sigma^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ ist der Prozess stationär.

Bemerkungen: Verallgemeinerungen der Ornstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung sind:

(a) $dX_t = a'(t)/a(t)\,X_t\,dt + a(t)\,b(t)\,dB_t$ mit Lösung $X_t = a(t)(X_0 + \int_0^t b(s)\,dB_s)$ $(a(0) = 1)$.

(b) Auch $dX_t = g(t)X_t\,dt + c(t)\,dB_t$ hat die Struktur von (a).

(c) Ein Spezialfall von (b) ist $dX_t = -(1-t)^{-1}X_t\,dt + dB_t$, $t \in [0, 1)$.
Die Lösung verhält sich stochastisch wie die Brownsche Brücke $B_t - tB_1$. (s. Übg.)