Stochastische Prozesse II

Itô-Integrale und Stochastische Differentialgleichungen

Definition SDG: Eine **Stochastische Differentialgleichung** ist die Aufgabe, einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozess $(X(\cdot,t), t\in[0,T])$ zu bestimmen mit der Eigenschaft

$$X(\omega,t) \;=\; X_0(\omega) + \int_0^t a(\omega,s,X_s)\,ds + \int_0^t b(\omega,s,X_s)\,dB_s\,,$$

oder in Kurzform $\quad dX_t \;=\; a(\omega,t,X_t)\,dt + b(\omega,t,X_t)\,dB_t$ mit gegebenem X_0 (bzw. die Formel selbst). Dabei seien a, b und X_0 geeignete Fkt., $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert.

Wir betrachten hier nur stochastische Differentialgleichungen der Form

$$dX_t \;=\; a(t,X_t)\,dt + b(t,X_t)\,dB_t, \quad t\in[0,T],$$

d.h. die Koeffizienten hängen von ω nur über X_t ab.

Definition SDG L: Ein stochastischer Prozess $(X_t, t\in[0,T])$ heißt **Lösung der SDG**

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)\,ds + \int_0^t b(s,X_s)\,dB_s\,, \tag{1}$$

bzw.

$$dX_t = a(t,X_t)\,dt + b(t,X_t)\,dB_t \quad \text{mit geg. } X_0\,, \tag{1'}$$

falls gilt:
- (a) (X_t) ist $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert und besitzt stetige Pfade,
- (b) $a(t,X_t)\in\mathcal{L}^1_{[0,T]}$, $b(t,X_t)\in\mathcal{L}^2_{[0,T]}$,
- (c) (X_t) erfüllt die Differentialgleichung (1) bzw. (1′) .

Satz EuE: Die SDG (1) besitzt eine (bis auf Standard-Modifikationen) eine **eindeutige Lösung (X_t)** mit (e) $\sup E(X_t^2)<\infty$, falls ein $K>0$ existiert mit

(L) $\begin{array}{l} |\,a(t,x)-a(t,y)\,|\le K\,|\,x-y\,| \\ |\,b(t,x)-b(t,y)\,|\le K\,|\,x-y\,| \end{array}$ $\;\forall\, t\in[0,T],\ x,y\in\mathbb{R}$ **(Lipschitz-Bedingung)**

(W) $\begin{array}{l} |\,a(t,x)\,|^2\le K^2(1+|\,x\,|^2) \\ |\,b(t,x)\,|^2\le K^2(1+|\,x\,|^2) \end{array}$ $\;\forall\, t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}$ **(Wachstums-Beschränkung)**

Bemerkung: $a(t,x)$ beschreibt die **„Drift“**, $b(t,x)$ die **„Diffusion“**.

Satz „Stratnovich-Korrektur“: Die Lösungen der Itô-Differentialgleichung (1′) und der Statonovich-Differentialgleichung

$$dX_t = \overline{a}(t,X_t)\,dt + b(t,X_t)\circ dB_t \quad \text{mit} \quad \overline{a}(t,x) = a(t,x) - \frac{1}{2}\,b(t,x)\,\frac{\partial b(t,x)}{\partial x} \tag{2'}$$

stimmen überein. $\overline{a}$ heißt die **„korrigierte Drift“**.

Beispiel 1: $dX_t = \frac{1}{2}\,X_t dt + X_t dB_t \quad\Leftrightarrow\quad dX_t = X_t\circ dB_t\,.$
Lösung mit $(1/X_t)\circ dX_t = dB_t$, daraus folgt: $\ln X_t - \ln X_0 = B_t \;\Rightarrow\; X_t = X_0 e^{B_t}\,.$

Beispiel 2: $dX_t = [\alpha\, b(X_t) + \frac{1}{2}\,b(X_t)\,b'(X_t)]\,dt + b(X_t)\,dB_t$ mit $b(x)>0\,.$
Lösung: Ist $h(x)$ Stammfunktion zu $b(x)^{-1}$, so gilt $X_t = h^{-1}(\alpha\, t + B_t + h(X_0))\,.$ (s. Übg.)

Bemerkung: Entsprechend kann man Stoch. Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^k$ behandeln mit m-dimensionalen Brownschen Prozessen ($B_t^j, 1\le j\le m,\ B_t^i, B_t^j$ stoch. unabhängig). Die Funktionen $a(t,x)$, $b(t,x)$ sind dann Matrizen. Itô-Formel und $\underline{a}$ entsprechend.

Es folgt der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess als Beispiel eines stationären Prozesses.