Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
MIN-Fakultät, Dpt. Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

Teil I: Itô-Integral und andere Integrale bzgl. Stochastischer Prozesse

Eigenschaften von $\int_0^t b(s)\, dB_s$: Aus der Definition und der Martingaleigenschaft folgt

(a) $E(\int_0^t b(s)\, dB_s) = 0$

(b) $\mathrm{Var}(\int_0^t b(s)\, dB_s) = ||\int_0^t b(s)\, dB_s||_2^{\;2} = ||b||_2^{\;2} = E\int_0^t b^2(s)\, ds = \int_0^t Eb^2(s)\, ds$. (Isometrie!)

Beispiel: Für $b(s) := B_s$ gilt $\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2} B_t^{\,2} - \frac{1}{2} t$, – vgl. $\int_0^t s\, ds = \frac{1}{2} t^2$ –. (Bew. s. Übg.)

Bei Itô-Integralen mit einer Stoppzeit als oberer Grenze muss man formal sorgfältig vorgehen, weil der Integrand $\widetilde{f}(\omega, s) := f(\omega, s)\, 1_{\{s \le \tau(\omega)\}}$ nicht zur Definition von $\int_0^t f(s)\, dB_s$ passt:

Satz „Gestoppte Itô-Integrale": Sei $f, g \in \mathcal{H}^2$ und τ eine Stoppzeit (bzgl. $(\mathcal{F}_t)$) mit $f(\omega, s) = g(\omega, s)$ für $s \le \tau(\omega)$ (z.B. $g(\omega, s) = \widetilde{f}(\omega, s)$, s.o.), dann stimmen die Itô-Integrale $X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s)\, dB_s$ und $Y_t(\omega) = \int_0^t g(\omega, s)\, dB_s$ (wenigstens) auf $\{t \le \tau(\omega)\}$ überein.

Erweiterung: Lokale Itô-Integrale und lokale Martingale

Vorbemerkung: Die Beschränkung der Integranden auf $\mathcal{H}^2 \in \mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T])$ ist oft hinderlich. Man möchte **(1)** $E\int_0^T b^2(s)\, ds < \infty$ abschwächen zu **(2)** $\int_0^T b^2(s)\, ds < \infty$ P-f.s.. Dazu approximiert man (2) durch eine isotone Folge von Stoppzeiten, so dass „unterhalb" (1) gilt.

Definition: Es sei $\underline{\mathcal{L}^2_{\mathrm{LOC}}} := \{b \colon \Omega \times [0,T] \to I\!R \,:\, b$ ist messbar, adaptiert und erfüllt (2)$\}$.

Folgerung: Ist g stetig, dann ist $(b(\omega, s)) = \underline{(g(B_s)) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{LOC}}}$. (Die Abbildung $t \mapsto g(B_t(\omega))$ ist $\forall\, \omega$ auf $[0,T]$ stetig, damit beschränkt, also ist (2) erfüllt. Für $g(x) = \exp(x^4)$ gilt (1) nicht.)

Definition: Eine isotone Folge (ν_n) von Stoppzeiten heißt **$\mathcal{H}$-lokalisierende Folge für** f $(f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{LOC}})$, wenn $f_n(\omega, t) = f(\omega, t)\, 1_{\{t \le \nu_n\}} \in \mathcal{H}^2$ $\forall\, n$ und $P(\bigcup_{n=1}^\infty \{\omega \colon \nu_n(\omega) = T\}) = 1$.

Satz: Für $f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{LOC}}$ ist $(\tau_n := \inf\, \{s \colon \int_0^s f^2(\omega, t)\, dt \ge n \text{ oder } s \ge T\})$ $\mathcal{H}^2$-lokalisierend für f.

Beweis: (a) . . . $\Rightarrow$ $P(\bigcup_{n=1}^\infty \{\omega \colon \nu_n(\omega) = T\}) = 1$.

(b) Aus $f_n(\omega, t) := f(\omega, t)\, 1_{\{t \le \tau_n\}}$ folgt $||\, f_n||^2_{\mathcal{L}^2(\Omega \times [o,T]} \le n$, also $f_n \in \mathcal{H}^2$ $\forall\, n$.

Satz/Definition „Itô-Integral auf L^2_{LOC}: Sei $f \in L^2_{\mathrm{LOC}}$, (ν_n) $\mathcal{H}$-lokalisierende Folge für f, $(X_{t,n})$ das eind. stetige Martingal auf $[0,T]$ mit $X_{t,n} = I(g_t)$ für $g(\omega, s) := f(\omega, s)\, 1_{\{s \le \nu_n(\omega)\}}$. Dann existiert ein Prozess (X_t) mit $X_t = \lim_n X_{t,n}$ P-f.s. $\forall\, t \in [0, t]$, der nicht von der Wahl der lokalisierenden Folge (ν_n) abhängt. (X_t) heißt dann das Itô-Integral von f.

Bemerkung: Der Satz über „gestoppte Itô-Integrale" gilt auch in L^2_{LOC}.

Spezialfall $f = g(B_s)$ (s.o.): Ist $g : I\!R \to I\!R$ stetig (nicht notw. $\in \mathcal{H}^2$), dann gilt:
Für $t_i = i\,T/n$ $(0 \le i \le n)$ konvergiert $\sum_{i=1}^n g(B_{t_{i-1}})\, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ **stoch.** gegen $\int_0^T g(B_s)\, dB_s$.

Spezialfall $f(s)$ unabh. von ω: Ist $f : I\!R \to I\!R$ stetig, dann ist $X_t = \int_0^T f(s)\, dB_s$, $t \in [0,T]$ ein Gauß-Prozess mit $EX_t = 0$, mit unabh. Zuwächsen und Kov.fkt. $k(s,t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du$.
Bei $t_i = i\,T/n$ konv. $\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ stoch. gegen $\int_0^T f(s)\, dB_s$ (t_i^* bel.).

Definition: Ein **lokales Martingal** ist ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess (X_t) mit einer isotonen Folge von Stoppzeiten τ_n mit $\tau_n \to \infty$, so dass $M_t^{(n)} = M_{t \wedge \tau_n} - M_0$ $\forall\, n$ ein Martingal ist.

Satz: Itô-Integrale auf $\mathcal{L}^2_{\mathrm{LOC}}$ sind stetige lokale Martingale.