Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
MIN-Fakultät, Dpt. Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

Teil I: Itô-Integral und andere Integrale bzgl. Stochastischer Prozesse

Motivation zum Itô-Integral: Ein stochastischer Prozess werde von **Störungen** in Form eines Brownschen Prozesses (B_t) beeinflusst. Die Größe des Einflusses in $(s, s+ds)$ werde durch eine Gewichtsfkt. $b(s,\omega)$ bestimmt, die der Störung $B_{s+ds}-B_s$ das Gewicht $(b(s,\cdot))$ $(\in I\!R)$ gibt. Der „Prozess" $(b(s,\cdot))$ darf keine Information über $(B_u - B_s, u \geq s)$ enthalten, aber durchaus über $(B_u, 0 \leq u \leq s)$. Der **Gesamteinfluss** ist dann $\int b(s)dB(s)$.

Bemerkung: Wir betrachten den 1-dim. Fall. Im allgemeinen ist (B_t) n-dimensional, $b(s,w)$ ist eine $m \times n$-Matrix und statt $|\,b(s)|$, $b^2(s)$ wird $||\,b(s)||_2$, $||\,b(s)||_2{}^2$ gesetzt.

Definition $\mathcal{H}^2[0,T]$: Es sei $(\mathcal{F}_t)$ die Filtration bzgl. des Brownschen Prozesses (B_t) und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,T]$. Eine Abbildung $b : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ sei **'messbar'**, wenn sie $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}$-messbar, und **'adaptiert'**, wenn (für alle t) $b(\,\cdot\,, t)$ bzgl. F_t messbar ist.
$\mathcal{H}^2[0,T]$ (kurz $\mathcal{H}^2$) sei die Menge aller messbaren und adaptierten Abbildungen (Prozesse) aus $\mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T])$, d.h. mit $E \int_0^T b^2(s)ds < \infty$ P-f.s.

Bemerkung: $\mathcal{H}^2[0,T]$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T])$.

Definition (Vorstufe des Itô-Integrals mit Treppenfunktion $b(\omega,t)$):
Mit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, b_i $\mathcal{F}_{t_i}$-adaptiert und $E(b_i^2) < \infty$ sei
$b(\omega,t) := \sum_{i=0}^{n-1} b_i(\omega)\, 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$. – Die Menge solcher Treppenfunktionen (in $\mathcal{H}^2[0,T]$) bezeichnet man mit $\mathcal{H}_0^2[0,T]$. – Man setzt dann $I(b)(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} b_i(\omega)(B_{t_i+1}(\omega) - B_{t_i}(\omega))$.

Um die Abbildung $I : \mathcal{H}_0^2 \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ auf $\mathcal{H}^2$ fortzusetzen, benötigt man (u.a.) die $\mathcal{L}^2$-Stetigkeit der Abbildung I. Diese folgt aus der (sog.) Isometrie auf $\mathcal{H}_0^2$. (Bew. s.Übg.)

Lemma 1: (Isometrie auf $\mathcal{H}_0^2$) Für $b \in \mathcal{H}_0^2$ gilt $||\,I(b)\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = ||\,b\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])}$. (Bew. s. Übg.)

Außerdem benötigt man, dass $\mathcal{H}_0^2$ in $\mathcal{H}^2$ dicht liegt (bzgl. der $\mathcal{L}^2$-Norm):

Approximations-Satz: Der Approximations-Operator $A_n : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}_0^2$, definiert durch

$$A_n(b) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(\omega,u)\, du \right\} 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \quad \text{mit} \quad t_i := i\,T/2^n \quad (0 \leq i \leq 2^n),$$

ist linear, beschränkt, und es gilt (1) $||\,A_n(b)\,||_\infty \leq ||\,b\,||_\infty$,
(2) $||\,A_n(b)\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])} \leq ||\,b\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])}$,
(3) $\lim_{n\to\infty} ||\,A_n(b) - b\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])} = 0$ für alle $b \in \mathcal{H}^2$. (Beweis s. Steele, S. 90ff)

Definition Itô-Integral, 2. Stufe: Ist $b \in \mathcal{H}^2$ und ist (b_n) eine approximierende Folge mit $||\,b_n - b\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])} \to 0$, dann ist (b_n) eine $\mathcal{L}^2$-Cauchy-Folge. Nach Lemma 1 ist dann auch $(I(b_n))$ eine Cauchy-Folge. Also gibt es ein $I(b) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ mit $||\,I(b_n) - I(b)\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \to 0$.
„Man zeigt leicht", dass $I(b)$ nicht von der speziellen Folge (b_n) abhängt. (Bew. s.Übg.)

Lemma 2: (Isometrie auf $\mathcal{H}^2$) Für $b \in \mathcal{H}^2$ gilt $||\,I(b)\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = ||\,b\,||_{\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T])}$. (Bew. s. Übg.)

Der nächste Schritt: Ist $t \mapsto I(b_t)$ mit $b_t(\omega,s) := b(\omega,s)\, 1_{[0,t]}(s))$, ein Martingal?
[$I(b_t)$ ist für alle $t \in [0,T]$ nur auf N_t^c ($P(N_t = 0)$ festgelegt (überabzählbar viele!).]

Satz Itô-Mrt: $\forall\, b \in \mathcal{H}^2$ ex. X_t, $t \in [0,T]$, stetig, Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ mit $X_t = I(b_t)$ P-f.s.
Beweis-Idee: Nur *eine* Approx. $(b^{(n)})$ und $X_t^{(n)} = I(b_t^{(n)})$. Z.z.: $\exists\,(X_t)$ mit $X_t^{(n)} \overset{\text{glm.}}{\to} X_t$.