Stochastische Prozesse II

Teil I: Itô-Integral und andere Integrale bzgl. Stochastischer Prozesse

Einführung (3): Zur Konvergenz von Martingalen

Es sei erinnert an Beispiel Mt 8 (aus StoPro I), um daran die folgenden Sätze zu prüfen, sowie an Beispiel MtS und an Lemma MtSub (aus Itô 1).

Beispiel Mt 8: Das „Verdoppelungs-Spiel" (Setzen auf „Rot" bis zum 1. Gewinn, bei Verlust doppelter Einsatz) ist ohne die „0" ein Martingal, aber: $X_n = 1$ mit W. $1-2^{-n} // = 1-2^n$ sonst. $\Rightarrow X_n \to 1 =: X_\infty$ (P-f.s.), aber $EX_n \,(=0)$ konv. nicht gegen $EX_\infty = 1$, anders als erwartet.

Beispiel MtS (Martingal-Trafo mit Stoppzeiten): (M_n) Martingal, τ Stoppzeit $\Rightarrow$ (a) $(M_{n\wedge\tau})$ ist e. Martingal, (b) $(M_{n\wedge\tau}) \to M_\tau$ P-f.s. falls $\tau < \infty$ P-f.s.

Lemma MtSub: Ist (M_n) ein Martingal, dann ist $(|M_n|)$ [bzw. $(|M_n|^p)$] ein Submartingal.

Satz MtDM „Doob-Maximal-Ungleichung": Ist (M_n) ein nicht-neg. Submartingal und $\lambda > 0$, dann gilt $\lambda P(M_n^* \geq \lambda) \leq E(M_n 1\{M_n^* \geq \lambda\}) \leq E(M_n)$ [bzw. $\lambda^p P(M_n^* \geq \lambda) \leq E(M_n^p)$].

In Stopro I wurde gezeigt (dort als Satz Mt 9, hier als MtK1 wg. „Beschränkung in 1-Norm"):

Satz MtK1: Ist (M_n) ein Martingal mit $E|M_n| \leq B < \infty \;\forall n$, dann existiert M_∞ mit $M_n \to M_\infty$ P-f.s. und $E|M_\infty| \leq B$. $(E|M_\infty| \leq \sup E|M_n|$ mit L.v.Fatou)

Es folgt eine Variante mit 2-Norm (stärkere Voraussetzung und stärkere Folgerung):

Satz MtK2: Ist (M_n) ein Martingal mit $E{M_n}^2 \leq B < \infty \;\forall n$, dann existiert M_∞ mit $M_n \to M_\infty$ P-f.s. **und in $\mathcal{L}^2$** (d.h. $||M_n - M_\infty||_2 \to 0$), also $EM_n \to EM_\infty$ und $E{M_\infty}^2 \leq B$.

Bemerkung: In Beispiel Mt 8 gilt $E|M_n| \leq B < \infty$ (welches B?), aber es ex. kein $B' < \infty$ mit $E{M_n}^2 \leq B'$ (s. Übg.). Dort gilt auch nicht $EM_n \to EM_\infty$ (Es ist $EM_n = 0$ und $EM_\infty = 1$.)

Beweis-Idee zu Satz MtK2 (wie bei MtK1/Mt 9 mit B_{ab} aber ohne $\overline{U}_{ab}^{(n)}$):
Es sei für $a < b$ (rational) $B_{ab} := \{\liminf M_n \leq a < b \leq \limsup M_n\}$, dann gilt für alle $m \geq 0$
$B_{ab} \subset \bigcup_{n>m} \left\{\sup_{k\in\{m,\dots,n\}} |M_k - M_m| \geq \varepsilon\right\}$ für $\varepsilon < b-a$. Ist $d_k := M_k - M_{k-1}$, dann gilt
$E(d_k\, d_j) = 0$ für $k \neq j$, und es folgt $E{M_n}^2 = E(\sum_1^n d_k)^2 = \sum_1^n E\,{d_k}^2 \leq B \;\forall n$, auch f. $n = \infty$.
Wg. MtSub ist $M_n^{(m)} := (M_{n+m} - M_m)^2$ ein Submartingal, also gilt mit Satz MtDM für $(M_n^{(m)})$:
$P\left(B_{ab}\right) \leq \lim_n P(\sup_{k\in\{m,\dots,n\}} |M_k - M_m| \geq \varepsilon\big) = \lim_n P\left(\sup_{k\in\{m,\dots,n\}} (M_k - M_m)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq$
$\leq \lim_n \frac{1}{\varepsilon^2} E(M_n^{(m)})^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m+1}^\infty E\,{d_k}^2 \stackrel{(m\to\infty)}{\to} 0.$
Zur Konvergenz in $\mathcal{L}^2$: $M_\infty - M_m = \sum_{m+1}^\infty d_k$ und $E(M_\infty - M_m)^2 = \sum_{m+1}^\infty E\,{d_k}^2 \to 0$.

Bemerkung: Setzt man in **Satz MtK1** zusätzlich $|M_{n+1} - M_n| \leq B < \infty$ voraus, dann gibt es **einen einfachen Beweis** mit der später benötigten Idee der „Lokalisation":
Es sei $\tau := \inf\{n\colon |M_n| \geq \lambda\}$, $R_n := M_n - M_{n\wedge\tau}$ ($\Rightarrow R_n = 0$ auf $\{\tau = \infty\}$). Dann folgt $(M_{n\wedge\tau})$ ist Martingal (wg. MtS) und $|M_{n\wedge\tau}| \leq \lambda + B$, also $E(M_{n\wedge\tau})^2 \leq (\lambda+B)^2 < \infty$, damit konvergiert $M_{n\wedge\tau}$ P-f.s. und auf $\{\tau = \infty\}$ auch (M_n).
Daraus folgt $S := \{(M_n) \text{ konv. nicht}\} \subset \{\tau < \infty\} \subset \{\sup |M_n| \geq \lambda\}$.
Mit MtDM und MtSub folgt $P(S) \leq \lim_N P(\sup_{n\leq N} |M_n| \geq \lambda) \leq \sup_N E|M_N|/\lambda \leq B/\lambda \stackrel{\lambda\to\infty}{\to} 0$.

Beispiel MtAB: Sei $S_n := \sum_1^n Y_i$, Y_i i.i.d, $= \pm 1$ mit W. $\frac{1}{2}$, $\tau_{AB} := \min\{n\colon S_n = A \text{ oder } -B\}$.
Frage: Ist $\tau_{AB} < \infty$ P-f.s.? **Antwort:** (S_n) und $(M_n := S_{n\wedge\tau})$ sind Martingale, auf $\{\tau_{AB} = \infty\}$ konv. (M_n) nicht (!). **Aber:** (M_n) ist beschr. Mart., also konv. (M_n) P-f.s. $\Rightarrow P(\tau_{AB} = \infty) = 0$.