Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
MIN-Fakultät, Dpt. Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

Teil I: Itô-Integral und andere Integrale bzgl. Stochastischer Prozesse

Einführung (Forts.): Submartingale, $\mathcal{L}^p$-Räume und nützliche Ungleichungen

Lemma MtSub: Ist (M_n) ein Martingal, dann ist $(|M_n|)$ ein **Submartingal**.
Ist $p \geq 1$ und $E(|M_n|^p) < \infty\ \forall n$, dann ist auch $(|M_n|^p)$ ein Submartingal.

Zum Beweis benutzt man die **Jensensche Ungleichung** für bedingte Erwartungswerte:
Ist g konvex und sind X und $g(X)$ integrierbar, dann gilt $g(EX|\mathcal{F}) \leq E(g(X)|\mathcal{F})$.

Definition „$\mathcal{L}^p$-Räume“: Für $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ (genauer $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$) der normierte Vektorraum aller ZV X über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit der Norm $||X||_p := (E|X|^p)^{1/p} < \infty$,
wobei alle P-f.s. gleichen ZV zu Äquivalenzklassen zusammengefasst werden.
Für $p = \infty$ ist $||X||_\infty$ die (essentielle) Sup-Norm $(= \operatorname{ess\,sup}|X| := \inf\{C : |X| \leq C\ P\text{-f.s.}\})$.

„Norm“ folgt für $||X||_p$ aus der **Minkowski-Ungleichung** $||X+Y||_p \leq ||X||_p + ||Y||_p$.
Beweis für $1 < p < \infty$ und $||X||_p, ||Y||_p < \infty$ mit $(X+Y)^p = (X+Y)(X+Y)^{p-1}$ und „Hölder“:

Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die **Hölder-Ungleichung** $||X\,Y||_1 \leq ||X||_p\,||Y||_q$.

Bew.: $(\frac{\alpha}{\beta})^{1/p} \leq (\frac{\alpha}{\beta} - 1)/p + 1 \Rightarrow \alpha^{1/p}\beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$, dann $\alpha := X^p/EX^p$, $\beta := Y^q/EY^q$ u. $E(\ \ )$.

Lemma „Norm“: Für $p \leq p'$ gilt $||X||_p \leq ||X||_{p'}$, speziell $||X||_1 \leq ||X||_2 \leq ||X||_\infty$.
Beweis: Für $p\lambda = p' < \infty$ mit „Jensen“ und $g(x) = x^\lambda$: $(E|X|^p)^\lambda \leq E(|X|^{p\lambda})$, für $p' = \infty$ folgt $E|X|^p \leq C^p$ aus $|X| \leq C$.

Definition: Für jede Folge (M_n) heißt $(M_n^* := \sup_{0 \leq m \leq n} M_m)$ die (zugeh.) **Maximal-Folge**.

Satz MtDM „Doob-Maximal-Ungleichung“: Ist (M_n) ein nicht-negatives Submartingal und $\lambda > 0$, dann gilt $\lambda P(M_n^* \geq \lambda)\,[= E(\lambda\,1\{M_n^* \geq \lambda\})] \leq E(M_n 1\{M_n^* \geq \lambda\}) \leq E(M_n)$.
Interpretation (der 1. Ungleichung): „Auf $\{M_n^* \geq \lambda\}$ gilt im Mittel $M_n \geq \lambda$“.

Beweis: (1) Für $m \leq n$ ist $M_m \leq E(M_n|\mathcal{F}_m)$ äquivalent zu „$E(M_m 1_B) \leq E(M_n 1_B)\ \forall B \in \mathcal{F}_m$“.
(2) Für $\tau := \inf\{m : M_m \geq \lambda\}$ gilt $\underline{\{M_n^* \geq \lambda\}} = \{\sup_{0 \leq m \leq n} M_m \geq \lambda\} = \underline{\{\tau \leq n\}}$.
(3) Auf $\{\tau \leq n\}$ ist $M_\tau \geq \lambda$, also gilt $\lambda\,1\{\tau \leq n\} \leq M_\tau 1\{\tau \leq n\} = \sum_{m=0}^n M_m 1\{\tau = m\}$.
(4) Aus (1) folgt $E(M_m 1\{\tau = m\}) \leq E(M_n 1\{\tau = m\})$ für $m \leq n$. Damit folgt aus (2) und (3)
$\lambda P(\ldots) \leq E(\sum_{m=0}^n M_m 1\{\tau = m\}) \leq E(\sum_{m=0}^n M_n 1\{\tau = m\}) = E(M_n 1\{M_n^* \geq \lambda\}) \leq E(M_n)$.

Bemerkung: Mit Hilfe von Lemma MtSub kann man die äußere Ungleichung in Satz MtDM verbessern zu $\lambda^p P(M_n^* \geq \lambda) \leq E(M_n^p)$ mit $p \geq 1$. (Man wendet Satz MtDM auf (M_n^p) an.)

Satz MtDL „Doob-$\mathcal{L}^p$-Ungleichung“: Ist (M_n) ein nicht-negatives Submartingal, $p \geq 1$ und $n \geq 0$, dann gilt $||M_n^*||_p \leq \dfrac{p}{p-1}||M_n||_p$.

Beweis: (1) Sei zur Vereinfachung $X := M_n^*$ und $Y := M_n$ Dann gilt nach Satz MtDM
$(*)$ $\lambda P(X \geq \lambda) \leq E(Y 1_{\{X \geq \lambda\}})\ \forall \lambda \geq 0$. Dazu sei o.E. $E(Y^p) < \infty$.

Weil $E(X^p) < \infty$ nicht vorausgesetzt ist, geht man zu $X_n := \min(X, n)$ über (Y bleibt gleich).
Hierfür gilt $(*)$ ebenfalls, und aus der Beh. für X_n folgt die Beh. für X mit d. Lemma v. Fatou.
Aus $E(YX^\alpha) = E[Y\int_0^\infty \alpha\,x^{\alpha-1} 1_{\{X_n \geq x\}}]dx = \int_0^\infty \alpha\,x^{\alpha-1} E[Y 1_{\{X_n \geq x\}}]dx$ mit $\alpha = p-1$ bzw. $Y = 1$, $\alpha = p$, also $E(YX^{p-1}) = (p-1)\int_0^\infty x^{p-2} E[Y 1_{\{X_n \geq x\}}]dx$ und $EX^p = p\int_0^\infty x^{p-2} x E 1_{\{X_n \geq x\}} dx$,
folgt $||X||_p{}^p = EX^p \leq \frac{p}{p-1} E(YX^{p-1}) \overset{\text{(Hö)}}{\leq} \frac{p}{p-1}||Y||_p ||X^{p-1}||_q = \frac{p}{p-1}||Y||_p ||X||_p{}^{p-1}$. q.e.d.