Stochastische Prozesse II

Teil I: Itô-Integral und andere Integrale bzgl. Stochastischer Prozesse,
Anwendung: **Modelle für Finanzprozesse**,
Stochastische Differentialgleichungen und Stochastische Kontrolltheorie
(Teil II: Zeitumkehrung bei Markovketten, Bedien-Systeme und Bedien-Netze]

Literatur zu Teil I: M. Steele: Stochastic Calculus and Financial Applications,
L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen,
H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie (4. Aufl., Kap. IV)

Einführung: Bei der Modellierung von Finanz-Prozessen können Brownsche Prozesse zwar lokal das Schwankungsverhalten einigermaßen abbilden, aber die Größe der lokalen Schwankungen müsste zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich sein. Deshalb muss man die lokalen Zuwächse mit Gewichten versehen. Die dabei entstehenden Prozesse (Itô-Prozesse) bestehen aus *Itô-Integralen*. Allgemeiner benutzt man Martingale statt Brownscher Prozesse. Deshalb beginnt dieser Teil mit **Ergänzungen zum Thema „Martingale“**.

Im Folgenden sei T stets eine geordnete Parametermenge, meist $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{R}_+$.

Definition Martingal: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathcal{F}_t,\ t\in T)$.
$(M_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}),\ t\in T)$ sei $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert, M_t integrierbar $\forall\, t$.
Dann heißt (M_t) **Martingal** (bzgl $(\mathcal{F}_t)$, wenn für alle $s \le t$ $(*)$ $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ P-f.s.
(M_t) heißt **Sub-** bzw. **Supermartingal**, falls in $(*)$ $\geq$ bzw. $\leq$ statt $=$ gilt.
Ein Sub-/Supermartingal ist also nach unten/oben durch die Vorgeschichte (M_s) begrenzt.

Beispiel Mt 1: Zinsbereinigte **Aktienkurse** bei Arbitrage-Freiheit sind $(\approx)$ Martingale.

Beispiel Mt 2: Prozesse (M_t) mit unabh. Zuwächsen, M_t integrierbar und $E(M_t - M_s) = 0$, z.B. **Brownsche Prozesse**, sind Martingale, bei $\geq 0/\leq 0$ entsprechend Sub-/Supermartingale.

Beispiel Mt 3: Ein **„faires“ Spiel** (bei voller Information) ist nach Definition ein Martingal.

Beispiel Mt 4: Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist $(M_t := E(X \mid \mathcal{F}_t))$ ein Martingal.

Beispiel MtQ (Quadratische Abweichung): Sei $S_n = \sum_1^n Y_i$ mit $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d., $EY_i = 0$ und $\mathrm{Var} Y_i = \sigma^2$. Dann ist der Stoch. Prozess $M_0 = 0$, $M_n = S_n^2 - n\,\sigma^2$ ein Martingal (s. Übg).

Beispiel MtP (Produkt-Martingal): Sei $Z_1, Z_2, \dots$ st.u., $EZ_i = 1$. Dann ist der Prozess $M_0 = 1$, $M_n = Z_1, \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n$ ein Martingal (folgt direkt aus „st.u.“).

Beispiel MtE (Exponential-Martingal): Sei $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d., $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $E(e^{\lambda Y_i}) < \infty$ ($\approx$LT) und $Z_i := e^{\lambda Y_i}/E(e^{\lambda Y_i})$. Dann ist $M_n := \Pi_1^n Z_i$ nach Bsp. MtP ein Martingal.
Gilt speziell $E(e^{\lambda Y_i}) = 1$ (f. geign. $\lambda \neq 0$), dann ist $M_n = e^{\lambda S_n}$ (mit $S_n = \sum_1^n Y_i$) ein Martingal.

Beispiel MtT (Martingal-Transformation): Ist $(M_n, n \geq 0)$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, z.B. $M_n =$ Aktienkurs z.Zt. n, und (A_n) eine Folge reeller beschränkter nicht-vorgreifender ZV (also mit $A_n \in \mathcal{F}_n$), z.B. $A_n =$ Menge der im Intervall $(n, n+1)$ gehaltenen Aktien, dann ist $(\widetilde{M}_n)$ mit $\widetilde{M}_n = \widetilde{M}_0 + A_0(M_1 - M_0) + \ldots + A_{n-1}(M_n - M_{n-1})$ ebenfalls ein Martingal, im Beispiel mit $\widetilde{M}_0 = A_0 M_0$ der Wert des Depots z.Zt. n, sonst $\widetilde{M}_0$ beliebig ($\mathcal{F}_0$-adaptiert).

Beispiel MtS (Martingal-Trafo mit Stoppzeiten): Ist (M_n) ein Martingal und τ eine Stoppzeit, beides bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, dann ist (a) der gestoppte Prozess $(M_{n\wedge\tau})$ (der Prae-τ-Prozess) auch ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ (Beweis mit Bsp. MtT und $A_n := 1_{\{\tau > n\}}$), und es gilt
(b) Falls $\tau < \infty$ P-f.s., dann konvergiert $(M_{n\wedge\tau})$ gegen $M_\tau := \sum_0^\infty 1_{\{\tau = k\}} M_k$ P-f.s. für $n \to \infty$.