Stochastische Prozesse I

Poisson-Prozesse

Vorbemerkung: Den Poisson-Zählprozess (N_t) erhält man in der Erneuerungstheorie aus $Y_i \sim \text{Exp}(\alpha)$. (N_t) ergibt sich auch als homogene Markovkette (X_t) mit stetiger Zeit aus $((T_n, Z_n))$ mit $T_n = Y_n$ $(T_0 = 0)$ und $Z_n = n$. Man kann (X_t) auch über andere Eigenschaften definieren:

Definition PP 1: Ein stochastischer Prozess $X = (X_t : \Omega \to \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_+)$ mit

1. X hat unabhängige Zuwächse,
2. X hat stationäre Zuwächse,
3. $\mathcal{L}(X_t) = \pi(\alpha t), t \in \mathbb{R}_+,\ \alpha > 0$ $(\pi(0) := \varepsilon_0)$,

heißt **Poisson-Prozess mit Parameter** α.

Bemerkung PP 2: Die Existenz eines solchen Prozesses folgt mit dem Satz von Kolmogorov nach Konstruktion der endlich-dimensionalen Randverteilungen.

Dass der Poisson-Zählprozess die in Definition PP 1 genannten Eigenschaften 1 und 2 besitzt, folgt aus der Markov-Eigenschaft von (X_t) wegen der vom Zustand und vom Zeitpunkt unabhängigen Ü-Raten $q_{i,i+1} = q_i = \alpha$. Eigenschaft 3 trägt er bereits im Namen (s. Et 2, Bsp. 1).

Bemerkung PP 3: In Def. PP 1 kann man Eigenschaft 3 auch ersetzen durch

3′. $\frac{1}{t} P(X_t > 1) \to 0$ für $t \to 0$, $P(X_0 = 0) = 1$ und $\exists\, s > 0$ mit $P(X_s = 0) < 1$.

Mit 1., 2., 3′., existiert $\alpha := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} P(X_t = 1)$ als Parameter des Poisson-Prozesses.

Weitere Eigenschaften des Poisson-Prozesses

Satz PP 4 (Überlagerung von Poisson-Prozessen): Sind (X'_t), (X''_t) st. unabh. Poisson-Prozesse mit Parametern α', α'', dann ist $(X'_t + X''_t)$ ein Poisson-Prozess mit Parameter $\alpha' + \alpha''$.

Satz PP 5 (Zerlegung von Poisson-Prozessen): Ist (X_t) ein Poisson(α)-Prozess und $(Z_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ein Bernoulli(p)-Zählprozess, d.h. $Z_n = \sum_{i=1}^n W_i$ für eine stoch. unabhängige Folge (W_i) von B(1,p)-ZV, und sind (X_t) und (Z_n) stoch. unabhängig, dann sind (X'_t), definiert durch $X'_t(w) = Z_{X_t(w)}(w)$, und $X''_t := X_t - X'_t$ **stoch. unabhängige** Poisson-Prozesse mit Parametern αp und $\alpha(1-p)$. (X'_t bzw. X''_t zählen die Ankünfte S_n, falls $W_n = 1$ bzw. $= 0$.)

Beweisidee: Man zeigt für $0 = t_0 < \ldots < t_n$ die Unabh. und Poisson-Verteilung der Zuwächse. Insbesondere gilt $P(X'_s - X'_0 = k, X''_s - X''_0 = j) = P(X_s - X_0 = j + k, \sum_{i=1}^{j+k} W_i = k) =$
$= P(X_s - X_0 = j + k) P(\sum_{i=1}^{j+k} W_i = k) = \pi(\alpha s; j+k)\, b(j+k, p; k) = \pi(\alpha p s; k)\, \pi(\alpha q s; j)$.

Instationäre Poisson-Prozesse: Um zeitliche Schwankungen in Ankunftsprozessen (Stoßzeit, Pausen) zu modellieren, benutzt man (sog.) instationäre Poisson-Prozesse mit $P^{X_t} = \pi(a(t))$ (statt $\pi(\alpha t)$) mit $t \mapsto a(t)$ stetig und isoton.
Die Funktion a beschleunigt/bremst/stoppt die „innere Uhr" eines Poisson-Prozesses.

Wenn Ankünfte mit Zahlungen verbunden sind, benutzt man (sog.) **zusammengesetzte Poisson-Prozesse**, z.B. für die Schadensumme Z_t einer Versicherung, wenn die Schadenzahl X_t ein Poisson-Prozess ist.
Mit Schadenshöhen $(W_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$ (st.u. von (X_t)) ergibt sich $Z_t := \sum_{i=1}^{X_t} W_i$.

Verteilung von Z_t, EZ_t, VarZ_t: Z_t hat die VF $F^{Z_t}(x) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} F^{n*}(x)$ $(F^{W_i} := F)$.
$EZ_t = \alpha t\, EW_i$, $\quad \text{Var} Z_t = EX_t\, \text{Var} W_i + \text{Var} X_t\, (EW_i)^2 = \alpha t\, \text{Var} W_i + \alpha t\, (EW_i)^2 = \alpha t\, EW_i^2$.

Laplace-Transformierte: $\psi_{Z_t}(s) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \psi_{W_i}^k(s) = e^{-\alpha t(1-\psi_{W_i}(s))}$.