Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 2: Besprechung am Montag, 31. 10. 05

Aufgabe P 2.1:

Wir betrachten eine einfache Lagerhaltung, z.B. für einen bestimmten Laptop-Typ in Firma XY. Die Taktlänge sei 1 Tag, es seien maximal 3 Geräte auf Lager, Bestandskontrolle jeweils abends, bei Lagerbestand 0 oder 1 werden 3 bzw. 2 Geräte nachbestellt, Lieferung über Nacht, die Nachfrage an einem Tag sei 0/1/2/3 mit W. 0.1/ 0.6/ 0.2/ 0.1 (vgl. Skript §3, „Beobachtung“ 1).

(a) Modellieren Sie den beschriebenen Vorgang durch eine (homogene ?) Markovkette mit Startverteilung(-Zähldichte) $(0.2, 0.0, 0.6, 0.2)$.
Geben Sie die Übergangsmatrix explizit an.

(b) Zeichnen Sie den Übergangs-Graph – mit Angabe der Wahrscheinlichkeiten.

(c) Berechnen Sie explizit $\mathbf{p}_1$.

Aufgabe P 2.2:

Zeigen Sie für eine homogene (!) Markovkette die allgemeine Markov-Eigenschaft (aus Klassifikation 3(b)) für $t_0 = 2,\ t_1 = 4,\ t_2 = 6$ in der Form $P(X_{t_2} = j \mid X_{t_0} = i, X_{t_1} = k) = \ldots$ mit Hilfe von Folgerung 2.5(a).

Aufgabe P 2.3 (Zur kanonischen Darstellung / Erzeuger von $\bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_i$):

Es sei $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ der Zustandsraum eines Stochastischen Prozesses.

(a) Auf welchem Erzeuger sind im Satz von Kolmogorov die W-Maße $(Q_E, E \in \mathcal{E})$ definiert?

Zeigen Sie: (b) Die folgenden σ-Algebren über $\Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}_0}$ stimmen überein.

$$\mathcal{A} := \sigma\left(\bigcup_{t=0}^{\infty} X_t^{-1}(\mathcal{B}_t)\right), \quad \widehat{\mathcal{A}} := \sigma\left(\bigcup_{t=0}^{\infty} \mathrm{pr}_{\{0,\ldots,t\}}^{-1}\left(\bigotimes_{i=0}^{t} \mathcal{B}_i\right)\right).$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \sigma\left(\bigcup_{t=0}^{\infty} \left\{\mathop{\times}_{i=0}^{t} B_i \times \mathop{\times}_{i=t+1}^{\infty} \mathcal{X}_i,\ B_i \in \mathcal{B}_i\right\}\right),$$

(c) Die Projektionen X_t sind genau dann $\overline{\mathcal{A}}$-$\mathcal{B}_t$-meßbar, wenn $\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ gilt.

(d) Der Erzeuger $\mathcal{Z}$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist ein Mengen-Ring in Ω (ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{R},\ A \cup A' \in \mathcal{R},\ A \setminus A' \in \mathcal{R}$ für $A, A' \in \mathcal{R}$.)