Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 14: Besprechung am Montag, 6. 2. 06

Aufgabe P 14.1:

Für $t \in [0, \infty)$ sei X_t die Zahl der im Zeitintervall $[0, t]$ an einem Schalter eintreffenden Kunden, (X_t) sei ein Poisson-Prozess mit Parameter α.

Berechnen Sie die (bedingte) Verteilung der Zahl der im Zeitintervall $(0, s] \subset [0, t]$ eingetroffenen Kunden,

(a) wenn im Intervall $[0, t]$ genau n Kunden eingetroffen sind.

(b) wenn – alternativ – n Kunden st.u. zu $\mathcal{R}(0, t)$-vert. Zeiten Y_i ankommen?

(c) Vergleichen Sie für $n=1$ $P(S_1 \le s_1 \mid X_t = 1)$ aus (a) mit $P(Y_1 \le s_1)$ aus (b), entsprechend für $n=2$ und $s_1 \le s_2$ $P(S_1 \le s_1, S_2 \le s_2 \mid X_t = 2)$ mit $P(\min(Y_1, Y_2) \le s_1, \max(Y_1, Y_2) \le s_2)$.

Aufgabe P 14.2:

$(X_t^{(1)})$ und $(X_t^{(2)})$ seien zwei stoch. unabhängige Poisson(α)-Zählprozesse (mit isotonen Pfaden), $S_k^{(1)}$ bzw. $S_k^{(2)}$ seien die zugehörigen Sprungzeiten.

(a) Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t, t \in \mathbb{R})$, definiert durch

$$X_t(\omega) := X_t^{(1)}(\omega) \quad \text{für} \quad t \ge 0, \qquad X_t(\omega) := -X_{-t}^{(2)}(\omega) \quad \text{für} \quad t < 0$$

unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt. (Verteilung der Zuwächse?)

(b) Die Sprungstellen von (X_t) seien nummeriert durch

$$S_k(\omega) := S_k^{(1)}(\omega) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}^*, \qquad S_k(\omega) := -S_{-k+1}^{(2)}(\omega) \quad \text{für} \quad k \in -\mathbb{N}_0\,.$$

Bestimmen Sie die Verteilungen von $S_k - S_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, insbes. für $k=1$.

Aufgabe P 14.3:

X sei $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt und X, Z stoch. unabhängig.

Kann Z so gewählt werden, dass der eingeschobene Zwischenwert Y mit $Y := \frac{1}{2} X + Z$ und $X - Y$ stoch. unabhängig und identisch verteilt sind.

Aufgabe P 14.4:

Es sei (X_t) ein Brownscher Prozess.

Für $t \in T' := [0, 1]$ sei $Y_t := X_t - t \cdot X_1$ (die Brownsche Brücke).

(a) Berechnen Sie $\mathrm{E}(Y_t)$ und zeigen Sie, dass $\mathrm{Kov}(Y_s, Y_t) = \min(s, t) - s \cdot t$ für $s, t \in [0, 1]$. Besitzt (Y_t) unabhängige Zuwächse?

(b) Zeigen Sie, dass $(X'_t) := ((1+t) Y_{t/(1+t)})$ ein Brownscher Prozess ist.