Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 13: Besprechung am Montag, 30. 01. 06

Aufgabe P 13.1:

Gegeben sei eine HMKS (X_t), konstruiert aus $((T_n, Z_n))$
mit $I = \{1, 2, 3\}$ und $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$, $r_{13} = r_{31} = 0$, $r_{23} = \frac{3}{4}$.

(a) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung von (X_t).
Skizzieren Sie dazu den ÜR-Graph zu (X_t) und benutzen Sie die Bedingung $\pi_i q_{i,i+1} = \pi_{i+1} q_{i+1,i}$, $i \in I\!N_0$ (2^*) aus H 12.2 (b).

(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung von (Z_n).

Aufgabe P 13.2:

(a) $T_0, T_1, T_2, \ldots$ seien st.u. ZV mit $T_i \sim \mathrm{Exp}(q_i)$, $q_i = (i+1)(i+2)$,
und es sei $\overline{T} := \sum_{i=0}^{\infty} T_i$. Zeigen Sie: $E\overline{T} < \infty$ und $\overline{T} < \infty$ (P-f.s.)

(b) Skizzieren Sie: $X_t(\omega) := 0$ für $0 \le t \le T_0(\omega)$ und

$$X_t(\omega) := k \quad \text{für} \quad T_0(\omega) + \sum_{i=k+1}^{\infty} T_i(\omega) \le t < T_0(\omega) + \sum_{i=k}^{\infty} T_i(\omega), \quad k \in I\!N.$$

(X_t sei für $t \ge \overline{T}$ jeweils durch eine gleiche, aber st.u. Version fortgesetzt.)

(c) (d) Welche Werte vermuten Sie für $q_{ij} := p'_{ij}(0)$? $(i, j \in I\!N_0)$
Ist (dann) (q_{ij}) eine konservative ÜR-Matrix?

Aufgabe P 13.3:

Die ZV $X_1, \ldots, X_n$ seien stoch. unabhängig und alle $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt
und $X := (X_1, \ldots, X_n)^T$, A sei eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{b}$ sei ein m-Vektor.

(a) Bestimmen Sie für X und $Y := A\,X + \mathbf{b}$ die Erwartungswerte (-vektoren) und die Kovarianzmatrizen $\mathbf{K}(X) := (\,Kov(X_i, X_j)\,)$ und $\mathbf{K}(Y)$.
Hinweis: $\mathbf{K}(Y) = A\,\mathbf{K}(X)\,A^T$.
Bemerkung: Die Verteilung von Y heißt n-dimensionale Normalverteilung und wird mit $\mathcal{N}(\mathbf{b}, AA^T)$ bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die (R-/λ-)Dichten von X und Y.

(c) Zeigen Sie, dass aus $K(Y_1, Y_2) = 0$ die stochastische Unabhängigkeit von Y_1 und Y_2 folgt.

(d) Zeigen Sie, dass Y die gleiche Verteilung wie X besitzt, wenn $m = n$ und $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt und A eine Orthonormal-Matrix ist.