Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 12: Besprechung am Montag, 23. 01. 06

Aufgabe P 12.1:

Zeigen Sie, dass (mit den Bezeichnungen von Satz MKs 4) gilt:
Die ZV T_1, T_2 sind unter $\{Z_0=i,\ Z_1=j\}$ stoch. unabhängig.

Aufgabe P 12.2:

Begründen Sie im **Beweis zu Satz MKs 5:**, warum das jeweilige $\leq, =, \to$ gilt.

Satz: Ist (X_t) nach Satz MKs 4 aus $(p_i(0))$, (r_{ij}) und (q_i) konstruiert, und ist $p_{ij}(\cdot)$ die zugeh. ÜMF, so ex. $q_{ij} := p'_{ij}(0)$ für alle $i,j \in I$ und es gilt:

$$q_{ii} := p'_{ii}(0) = -\,q_i \quad \text{und} \quad q_{ij} := p'_{ij}(0) = q_i\, r_{ij} \ \text{ für } i \neq j\,. \quad (r_{ii}=0!)$$

Beweis: $[\,$jeweils $h \to 0,\ P_i(\cdot) := P(\cdot \mid X_0=i),\ 1-e^{-q_i h} = q_i h + o(h)\,]$

(a) $\varepsilon(h) := \frac{1}{h} P_i(\geq 1 \text{ Sprung in } (0,h]) = \frac{1}{h} P_i(T_1 \leq h) = \frac{1}{h}(1-e^{-q_i h}) \to q_i < \infty$,

(b) $\delta_j(h) := \frac{1}{h} P_i\,(\geq 2 \text{ Sprünge in } (0,h], X_h=j) = \frac{1}{h} P_i(S_2 \leq h, X_h=j) \leq$
$\leq \frac{1}{h} P_i(T_1 \leq h, T_2 \leq h)$?

$= \sum_{k\in I} \frac{1}{h} P_i(T_1 \leq h, T_2 \leq h \mid Z_1=k)\, P_i(Z_1=k)$?

$= \frac{1}{h}(1-e^{-q_i h}) \sum_k (1-e^{-q_k h})\, r_{ik}$? $\quad \overset{maj.K.}{\longrightarrow} q_i \cdot 0$?

(c) $\frac{1}{h}\,[p_{ii}(0)-p_{ii}(h)] = \frac{1}{h}\,[1-P_i(X_h=i)] =$
$= \frac{1}{h}\,[1-(P_i(T_1>h) + h\,\delta_i(h))]$? $\quad = \varepsilon(h) - \delta_i(h) \to q_i$,

(d) $\frac{1}{h}\,[p_{ij}(h)-p_{ij}(0)] = \frac{1}{h}\,P_i(X_h=j) =$
$= \frac{1}{h}\,P_i(T_1 \leq h, S_2 > h, Z_1=j) + \delta_j(h)$?

$= \frac{1}{h} P_i(T_1 \leq h, Z_1=j) - \frac{1}{h} P_i(T_1 \leq h, T_2 \leq h-T_1, Z_1=j) + \delta_j(h)$?

$\to q_i r_{ij} + 0^* + 0 \quad ({}^*\text{ wie } \delta_j(h))$.

Aufgabe P 12.3:

Zeigen Sie mit geeigneten Annahmen:
Durch Ableiten der Bedingung (C) $\mathbf{p}(s+t) = \mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t)$ nach s an der Stelle $s=0$ ergibt sich die (Kolmogorovsche) Rückwärts-Dgl. $\boxed{p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p'_{ik}(0)\, p_{kj}(t)}$.