Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST



# Übungen zu Stochastische Prozesse I

**Präsenzaufgabenblatt 11:** Besprechung am Montag, 16. 01. 06

## Aufgabe P 11.1:

Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$,
$s_i$ die Symmetrie-Abbildung $s_i : \Omega := \Omega_1^n \to \Omega_1^n$ mit $i \in \mathcal{S}_n$
und $s_i((\omega_1, \ldots, \omega_n)) := (\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})$.
Außerdem sei $\mathcal{C}$ die Menge der – bzgl. aller $s_i$ – invarianten Mengen
aus $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_1$.

(a) Beschreiben Sie die Mengen aus $\mathcal{C}$ für $n=2$ anschaulich
und für beliebiges $n$ in Formeln.

(b) Beschreiben Sie die $\mathcal{C}$-messbaren Abbildungen $X_0 : \Omega \to I\!R$.

(c) Zeigen Sie dass für jede integrierbare ZV $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (I\!R, I\!B)$ gilt:
$E(X|\mathcal{C}) = h \sum_{i \in \mathcal{S}_n} X \circ s_i$ ($P$-f.s.), mit $h := 1/n!$, falls $P = P^{s_i}\ \forall i$,
sonst mit $h$ = Radon-Nikodym-Dichte von $P$ bzgl. $\sum_i P^{s_i}$.
Besitzt $P$ eine Dichte bzgl. $\mu$ mit $\mu^{s_i} = \mu\ \forall i$, z.B. eine Gleichverteilung,
dann ist $h = f / \sum_i f \circ s_i$.

## Aufgabe P 11.2:

(a) Zeigen Sie, dass für $\text{Var}(X|\mathcal{A}') := E\left([X - E(X|\mathcal{A}')]^2 | \mathcal{A}'\right)$ gilt:
$\text{Var}(X|\mathcal{A}') = E(X^2|\mathcal{A}') - [E(X|\mathcal{A}')]^2$.

(b) Zeigen Sie, dass – analog zu $EX = E(E(X|\mathcal{A}')$ – gilt:
$\text{Var}X = \text{Var}(E(X|\mathcal{A}')) + E(\text{Var}(X|\mathcal{A}'))$.

## Aufgabe P 11.3:

Nochmals zu Beispiel Mt 8 der Vorlesung:

Das „Verdoppelungs-Spiel“ (Setzen auf „Rot“ bis zum 1. Gewinn, bei Verlust doppelter Einsatz) ist beim üblichen Roulette ein Supermartingal, ohne die „0“ ein Martingal.

Zeigen Sie die letztgenannte Aussage.

Bestimmen Sie die Verteilungen von $X_n$ und die Erwartungswerte $EX_n$.

Konvergieren die Erwartungswerte $EX_n$ $(n \geq 1)$ gegen $EX_\infty = 1$?