Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST



# Übungen zu Stochastische Prozesse I

**Präsenzaufgabenblatt 1:** Besprechung am Montag, 24. 10. 05

**Aufgabe P 1.1:**

Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (ZV) mit $X_k : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$ bzw. $X_k : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{N}_0$.

Beispiel: $n = 2$ und $P(X_k = 0/1/2) = 0.2/0.3/0.5$ $(\forall k)$.

Geben Sie einen W-Raum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ an, in dem die ZV $X_k$ die $k$-te Projektion (= $k$-te Koordinatenvariable) ist (für alle $k$).

Wie kann man die stoch. Unabhängigkeit definieren bzw. überprüfen?

**Aufgabe P 1.2:**

Für die ZV $X_1, \ldots, X_n$ aus Aufg. P 1.1 seien $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die ZV mit $Y_i := \sum_{k=1}^{i} X_k$ $(Y_0 = 0)$.

Welche Verteilung haben die ZV $Y_i$ im Beispiel aus Aufg. 1 ?

Geben Sie auch hier einen W-Raum $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ an, in dem die ZV $Y_i$ die $i$-te Projektion ist (für alle $i$).

Wie kann man insbesondere das W-Maß $P''$ angeben?

**Aufgabe P 1.3:**

Für eine diskrete Verteilung $P^X$ auf $\mathbb{N}_0$ mit Zähl-Dichte $(p_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ definiert man die (sogenannte) **erzeugende Funktion** $g_X$ durch $g_X(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot z^n$ mit $z \in [0, 1)$.

(a) Begründen Sie, dass die Reihe in der Definition von $g_X$ immer konvergiert.

(b) Wie kann man aus $g_X$ die Wahrscheinlichkeiten $p_n$ erhalten?

(c) Was ergibt sich für $\lim_{z \to 1} g_X'(z)$, $\lim_{z \to 1} g_X''(z)$, $\lim_{z \to 1} g_X^{(n)}(z)$ ?

(d) Wenn eine von $X$ stoch. unabhängige ZV $Y$ eine diskrete Verteilung $P^Y$ auf $\mathbb{N}_0$ mit Zähl-Dichte $(q_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ die erzeugende Funktion $g_Y$ besitzt, was ergibt sich dann für die erzeugende Funktion $g_{X+Y}$ von $X + Y$ ?