Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

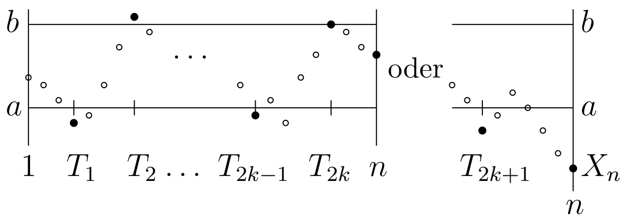
Martingale (Fortsetzung)

Beweis zu Satz Mt 9 (a): $[(X_n, n\in I\!N^*)$ Supermartingal mit „(Mt 1) $\sup_n E(X_n^-) < \infty$“ oder äquiv. „(Mt 2) $\sup_n E|X_n| < \infty$“ $\Rightarrow$ $\exists X_\infty$, integrierbar, mit $X_n \overset{P-f.s.}{\longrightarrow} X_\infty$. $]$

1. Aus „X_n Supermartingal“ folgt $EX_1 \geq EX_2 \geq \ldots$. $[EX_n \geq E[E(X_{n+1}|X_n)] = EX_{n+1}]$
2. Z.z. (Mt 1) $\Leftrightarrow$ (Mt 2)): $\underline{EX_n^- \leq}\ EX_n^- + EX_n^+ = \underline{E|X_n|} = EX_n + 2EX_n^- \underline{\leq EX_1 + 2EX_n^-}$.
3. $\underline{\text{Aus } B :=}\ \{X_n \text{ konvergiert nicht}\} = \{\omega : \liminf X_n(\omega) < \limsup X_n(\omega)\} =$
$= \bigcup_{a,b\in \mathbb{Q},\, a<b} \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\} =: \bigcup_{\ldots} B_{ab}$ $\underline{\text{folgt } P(B) \leq \sum_{\ldots} P(B_{ab})}$.
Annahme: $\underline{\exists\, B_{ab} \text{ mit } P(B_{ab})} = P(\exists\, \infty$ viele „aufsteigende Überquerungen von $[a,b]$“$)$ $\underline{> 0}$.
Dann ist auch E(Anzahl „aufsteigender Überquerungen von $[a,b]$“$) =: E(\overline{U}_{ab}) = \infty$.
Dies ist aber nach dem folgenden Hilfssatz wegen (Mt 1) **nicht möglich**. $\underline{\Rightarrow\ P(B) = 0}$.
4. $E|X_\infty| = E \liminf |X_n| \leq \liminf E|X_n| \leq \sup E|X_n| < \infty$.

Hilfssatz Mt 12 (Doobsche Ungleichung): Sei $(X_n, n\in I\!N)$ ein Supermartingal und $\overline{U}_{ab}^{(n)}$ die Anzahl der „aufsteigenden Überquerungen“ von $[a,b]$ in der Folge $X_1, \ldots, X_n$.
Dann gilt: $E(\overline{U}_{ab}^{(n)}) \leq \frac{1}{b-a} E[(X_n - a)^-] \leq \frac{1}{b-a}[EX_n^- + a^+],\ n \in I\!N$ $\qquad [(x-a)^- \leq x^- + a^+]$

Beweis: Seien $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \ldots \leq T_n$ die Zeitpunkte (Stoppzeiten), zu denen X_i erstmals jeweils $\leq a$ $(T_1, T_3, \ldots)$ bzw. erstmals $\geq b$ $(T_2, T_4, \ldots)$, sonst $= n$.



Falls $j \leq k := \overline{U}_{ab}^{(n)}$ gilt $X_{T_{2j}} - X_{T_{2j-1}} \geq b - a$,
falls $j \geq k+2$ gilt $X_{T_{2j}} - X_{T_{2j-1}} = 0$,
falls $j = k+1$ gilt $X_{T_{2j}} - X_{T_{2j-1}} = X_n - X_{T_{2k+1}} = 0$ (1. Skizze, $T_{2k+1} = n$) ,
$\geq X_n - a \geq -(X_n - a)^-$ (2. Skizze) .

Da (X_n) ein Supermartingal ist, gilt $EX_{T_1} \geq EX_{T_2} \geq \ldots$ (weil (X_{T_j}) Supermartingal, s.u.).
Daraus folgt: $0 \geq \sum_{j=0}^{n/2} E(X_{T_{2j}} - X_{T_{2j-1}}) \geq (b-a)E\overline{U}_{ab}^{(n)} - E(X_n - a)^-$.

Definition Mt 13: Sei T Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_t, t\in I)$, dann heißt $\underline{\mathcal{A}_T} := \{A \in \mathcal{A},\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{A}_t\ \forall t\}$ die $\underline{\sigma\text{-Algebra der T-Vergangenheit}}$.

Folgerung Mt 14: Seien T, T' Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{A}_t, t\in I)$, $T \leq T'$. Dann folgt: $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}_{T'}$.
Beweis: $B \in \mathcal{A}_T \Rightarrow B \cap \{T' \leq t\} = B \cap \{T \leq t\} \cap \{T' \leq t\} \in \mathcal{A}_t \Rightarrow$ (Def. $\mathcal{A}_{T'}$) $B \in \mathcal{A}_{T'}$.

Satz Mt 15 (Martingal-Eigenschaft für Stoppzeiten):
$(X_t, t\in I)$ mit $I = 1, \ldots, n$ sei (Super-)Martingal bzgl. $(\mathcal{A}_t,\ t\in I)$ und $(T_j,\ j\in J = \{1, \ldots, p\})$ sei eine isotone Folge von Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{A}_t)$. $\underline{\Rightarrow (X_{T_j}) \text{ ist (Super-)Martingal bzgl. } (\mathcal{A}_{T_j})}$.

Beweisidee: $E|X_{T_j}| = \sum_{i=1}^n \int |X_i| 1_{\{T_j = i\}} dP < \infty$. Die Gleichung für Martingale bzw. die Ungleichung für Supermartingale erhält man durch Verfeinerung der Folge (T_j) mit $T'_{j+1} - T'_j \leq 1$. Hierfür benutzt man in den Erwartungswerten Zerlegungen der Form $\sum_{\ldots} \{T'_j = i\}$.