Stochastische Prozesse I

Martingale

Literatur: H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie (4. Aufl., Kap. IV)

Motivation: Es gibt in der Anwendung Prozesse, die nicht die Markov-Eigenschaft erfüllen, z.B. ein (faires) Spiel (X_t = Kapital eines Spielers), bei dem das Verhalten des Spielers (etwa der Einsatz bei der nächsten Runde) von der vollen Vorgeschichte abhängen darf. Trotzdem möchte man den Verlauf für große t kennen.

Im Folgenden sei T stets eine (halb-)geordnete Parametermenge, meist $T = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{R}_+$.

Definition Mt 1: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathcal{A}_t)$.
$(X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}),\ t \in T)$ sei $(\mathcal{A}_t)$-adaptiert, X_t integrierbar $\forall\, t$.

Dann heißt (X_t) **Supermartingal** / **Martingal** / **Submartingal**, wenn $\forall\, s \leq t$ $(*)$ $E(X_t \mid \mathcal{A}_s) \leq / = / \geq X_s$ P-f.s.

Bemerkung Mt 2: „Martingal“ ist ursprünglich ein gewisser Zügel bei Pferden.
Dem Prozess sind sozusagen „Zügel angelegt“. „Sub-“ bzw. „Super-“ gibt an, wo die Zügel angelegt sind: „Super“ = oben ($\leq X_s$), ein Supermartingal geht also im Mittel abwärts.

Beispiel Mt 3: Zinsbereinigte Aktienkurse bei Arbitrage-Freiheit sind ($\approx$) Martingale.

Beispiel Mt 4: Prozesse (X_t) mit unabhängigen Zuwächsen, X_t integrierbar und $E(X_t - X_s) \geq 0 / \leq 0 / = 0$ sind Submartingale/Supermartingale/Martingale.

Beispiel Mt 5: Ein „faires“ Spiel (bei voller Information) ist nach Definition ein Martingal.

Beispiel Mt 6: Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist $(X_t := E(X \mid \mathcal{A}_t))$ ein Martingal.

Beispiel Mt 7: (Y_n) seien i.i.d Münzwürfe, $X_n := 0$ bei Kopf, $X_n := -2^n$ bei Zahl.
Dann ist $(X_n = -2^n Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ein Supermartingal (bzgl. $\mathcal{A}_t^Y$), aber (X_n) konv. P-f.s. nicht.

Beispiel Mt 8: Das „Verdoppelungs-Spiel“ (Setzen auf „Rot“ bis zum 1. Gewinn, bei Verlust doppelter Einsatz) ist beim üblichen Roulette ein Supermartingal, ohne die „0“ ein Martingal, aber: $X_n = 1$ mit W. $1 - 2^{-n} // = 1 - 2^n$ sonst. $\Rightarrow X_n \to 1 =: X_\infty$ (P-f.s.), aber EX_n $(=0)$ konv. nicht gegen $EX_\infty = 1$, anders als erwartet (vgl. monotone und majorisierte Konvergenz).

Satz Mt 9: Konvergenzsatz für (Super-)Martingale
Sei $T = \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathcal{A}_n)$, $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ein Supermartingal

(a) mit **(Mt 1)** $\sup_n E(X_n^-) < \infty$ oder äquivalent **(Mt 2)** $\sup_n E|X_n| < \infty$,
dann konvergiert (X_n) P-f.s. gegen eine integrierbare Zufallsvariable (X_∞),

(b) mit **(Mt 3)** $X_n \geq 0$ oder **(Mt 4)** (X_n) ist gleichgradig integrierbar *
folgt (Mt 1), $X_n \to X_\infty$, und zwar P-f.s., stochastisch und unter (Mt 4) auch **im Mittel**, und $(X_n,\ n \in \overline{\mathbb{N}}$ **(!)**$)$ ist ein Supermartingal. [Zum Beweis s. nächste Seite]

* $\forall\, \varepsilon > 0$ existiert (eine Fast-Majorante) $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$, integrierbar, mit $\int_{\{|X_n| \geq g\}} |X_n|\, dP \leq \varepsilon$.

Folgerung Mt 10: Ist (X_n) ein *Martingal* und gilt (Mt 4), dann ist $(X_n,\ n \in \overline{\mathbb{N}}\,(!))$ ein Martingal und es gilt **(Mt 5)** $X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{A}_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung Mt 11 (Zeitumkehrung): Für Supermartingale $(X_n,\ n \in -\mathbb{N}\,(!))$ mit (Mt 2) (bzw. Martingale) ex. $X_{-\infty} := \lim_{n \to -\infty} X_n$, und $(X_n,\ n \in -\overline{\mathbb{N}}\,(!))$ ist (Super-)Martingal.