Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

Markov-Prozesse

MP 1. Allgemeine Markov-Prozesse

Definition: Ein Stochastischer Prozess $(X_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}),\ T$ geordnet, mit der **Markov-Eigenschaft:** $P^{(X_u, u \le s, X_t)} = P^{(X_u, u \le s)} \otimes P^{(X_t | X_s = \cdot)}$ heißt **Markov-Prozess**, und es gilt **„CH-K“** $P^{(X_u | X_s = \cdot)}(x, B) = \int P^{(X_t | X_s = \cdot)}(x, dy) P^{(X_u | X_t = \cdot)}(y, B)$,
in Kurzform: $P_{su}(x, \cdot) = \int P_{st}(x, dy) P_{tu}(y, \cdot) =: P_{st} \circ P_{tu}(x, \cdot),\ \ x \in \mathcal{X}$.

Satz: Zu der Startverteilung $P^{X_{t_0}} = \mu$ und der ÜW $(P_{st},\ s < t)$ mit CH-K existiert ein Markov-Prozess (X_t) mit $P^{(X_t | X_s = \cdot)} = P_{st}\ (s < t)$ (kanonisch).

MP 2. Homogene Markov-Prozesse ($T \subset \mathbb{R}$): $P_{s,s+t} =: P_t$ sei nur abhängig von t (≥ 0).

Dann lautet **„CH-K“:** $P_{s+t}(x, B) = \int P_s(x, dy) P_t(y, B) = P_s \circ P_t(y, B)$

MP 3. Markov-Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen (auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^p$!):

Die Übergangs-W ist dann $P_{st}(x, x + B) = P_{st}(x', x' + B) =: Q_{st}(B)$.

MP 4. Homogene Markov-Prozesse mit unabh. Zuwächsen $P_t(x, x + B) =: Q_t(B)$

sind auch **Markov-Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen**

und **„CH-K“** $Q_{s+t}(B) = \int Q_s(dy) Q_t(B - y) = Q_s * Q_t(B)$ (Faltung!)

Definition (Faltungshalbguppe): Eine Familie $(Q_t,\ t \ge 0)$ von Verteilungen auf $\mathbb{R}^p$ mit $Q_{s+t} = Q_s * Q_t,\ \ s, t \ge 0$ heißt **Faltungshalbgruppe** auf $\mathbb{R}^p$.

Satz: Zu einer Faltungshalbgruppe $(Q_t,\ t \ge 0)$ ex. ein Markov-Prozess (X_t) mit unabhängigen und stationären Zuwächsen und mit $X_0 = 0,\ P^{(X_{s+t} - X_s)} = Q_t$.

Beispiele von Faltungshalbgruppen:

Beispiel 1: Deterministische Drift: $Q_t = \varepsilon_t,\ X_t = t$.

Beispiel 2: Poisson-Prozess: $Q_t = \pi(\alpha t)$ (mit $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$!).

Beispiel 3: Brownscher Prozess: $Q_t = \mathcal{N}(0, t)$ mit $\mathcal{X} = \mathbb{R}$
bzw. $Q_t = \mathcal{N}(0, t) \otimes \mathcal{N}(0, t) \otimes \ldots \otimes \mathcal{N}(0, t)$ mit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^p$.