Stochastische Prozesse I

# Markov-Ketten mit stetiger Zeit: Folgerungen und Beispiele

**Darstellungsmöglichkeiten für HMKS und ihre Zusammenhänge**

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{(X_t)\ \textbf{HMKS}} & \overset{MKs\,3}{\longleftarrow} \quad \overset{MKs\,2}{\longrightarrow} & \boxed{(p_{ij}(t))\ \textbf{ÜMF}} \\
\downarrow ? \qquad \uparrow \text{MKs}\,4 & & \downarrow \text{MKs}\,5\,/\,9 \qquad \uparrow \text{MKs}\,10 \\
\boxed{((T_n, Z_n))\ \textbf{MEP}} & \overset{MKs\,7\,(b)}{\longleftarrow} \quad \overset{MKs\,7\,(a)}{\longrightarrow} & \boxed{(q_{ij})\ \textbf{ÜR-Matrix, konserv.}}
\end{array}$$

**Bemerkung:** Aus ÜMF folgt nicht notwendig $p_{ij}(t) \to p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ $(t \to 0)$. Deshalb:

**Definition MKs 8:** Eine ÜMF $(p_{ij}(\cdot))$ heißt **Standard-ÜMF (SÜMF)**, wenn gilt:

$\boxed{\textbf{(E)}\ \lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \ \ \forall\, i,j}$ oder äquivalent $\boxed{\textbf{(E}'\textbf{)}\ \lim_{t\to 0} p_{ii}(t) = 1 \ \ \forall\, i}$.

**Satz MKs 9:** Sei $(p_{ij}(\cdot))$ eine SÜMF, dann gilt:

(a) Es existiert $q_i := -q_{ii} := -p'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(1 - p_{ii}(t)$ mit $q_i \le \infty$ (!) $\forall\, i \in I$.

(b) Es existiert $q_{ij} := p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t)$ mit $q_{ij} < \infty$ $\forall\, i,j \in I,\ i \ne j$.

(c) Es gilt $\sum_{j\ne i} p'_{ij}(0) \le -p'_{ii}(0) \le \infty$, – für endliches $I$ $\sum_{j \ne i} p'_{ij}(0) = -p'_{ii}(0) < \infty$.

**Bem. MKs 10:** Für jede (!) konservative Standard-HMKS gilt die Rückwärts-Diff.gleichung.

**Erste Beispiele: Ankunfts- und Abgangsprozesse (GuT-Prozesse)**

Anwendungen auf: Populationen, z.B. Fischbestände, Wildbestände, Krankheitsfälle, Zahl der wartenden Kunden, Datenpakete, …

**Modellierung durch eine HMKS:** $X_t$ sei die Größe einer Population z.Zt. $t$, $I = \mathbb{N}_0$,
Startverteilung: $(p_i(0))$, statt $q_i$ und $r_{ij}$ benutzt man einheitlich $q_{ij}$.
Ankunftsrate: vorläufig nur $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i \cdot h + o\,(h)$, entsprechend $q_{i,i+1} = p'_{i,i+1}(0) = \lambda_i$,
Abgangsrate: vorläufig nur $p_{i,i-1}(h) = \mu_i \cdot h + o\,(h)$, entsprechend $q_{i,i-1} = p'_{i,i-1}(0) = \mu_i$.
Übergänge zu $i+2, \dots, i-2, \dots$ kleine $h$ unwahrscheinlich, also $p_{ii}(h) = 1 - \lambda_i h - \mu_i(h) + o(h)$.
**Annahmen:** In Randpunkten: $\mu_0 = 0, \lambda_0 \ge 0$, bei $I$ endlich: $\lambda_N = 0, \mu_N \ge 0$, sonst: $\mu_i > 0, \lambda_i > 0$.

Kann es dabei **unendlich viele Sprünge** geben? Nicht, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i + \lambda_i)^{-1} = \infty$.

**Spezialfälle:**

A: Warteschlange, 1 Schalter, unendl. Warteraum (M|M| 1 | ∞) $\lambda_i = \lambda,\ \mu_i = \mu,\ q_i$ beschr.,
B: Bedien-Modell: „Klassische Telefonzentrale“ (M|M| ∞) $\lambda_i = \lambda,\ \mu_i = i \cdot \mu$,
C: Warteschlange mit $s$ Schaltern, unendl. Warteraum (M|M| $s$ | ∞) $\lambda_i = \lambda,\ \mu_i = \mu \min(i, s)$,
D: Lineares Wachstum mit Absorption: $\lambda = 0,\ \lambda_i = \lambda \cdot i,\ \mu_i = \mu \cdot i$,
E: Lineares Wachstum mit Zuwanderung: $\lambda_i = \lambda \cdot i + a,\ \mu_i = \mu \cdot i$.

**Satz MKs 11:** Für $(p_{ij}(\cdot))$ konserv. und $(\pi_i)\ (\ge 0)$ mit $\boxed{\textbf{(3)}\ \sum \pi_i q_i < \infty}$ und $\boxed{\textbf{(3}'\textbf{)}\ \sum \pi_i < \infty}$
sind äquivalent: $\boxed{\textbf{(1)}\ \sum_i \pi_i p_{ij}(t)\ \forall\, j, t}$, $\boxed{\textbf{(1}'\textbf{)}\ \sum_i \pi_i p'_{ij}(t)\ \forall\, j, t}$ und $\boxed{\textbf{(2)}\ \sum_i \pi_i q_{ij} = 0\ \forall\, j}$.

**Folgerung MKs 12:** $(\pi_i, i \in I)$ $(\ge 0, \sum \pi_i = 1)$ mit **(2)** ist **stationäre Verteilung** von $(X_t)$ und $(\varrho_i, i \in I)$ mit $\varrho_i, := \pi_i\, q_i / (\sum \pi_i\, q_i)$ ist **stationäre Verteilung** von $(Z_n)$.

**Satz MKs 13:** Für alle $\mathbf{p} := (p_i(0))$ existiert $\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \sum_{i\in I} p_i(0) \pi_{ij} =: \pi_j(\mathbf{p})$
und es gilt $\sum_{j \in I} \pi_j(\mathbf{p}) \le 1$ und (1): $\pi_j(\mathbf{p}) = \sum_{i \in I} \pi_i(\mathbf{p}) p_{ij}(t),\ j \in I, t \ge 0$.