Stochastische Prozesse I

Markov-Ketten mit stetiger Zeit (Forts.)

Beweis zu Satz MKs 4: Konstruktion von $((T_n, Z_n))$ mit dem Satz von IONESCU-TULCEA: Das Ü-W-Maß ist festgelegt durch: $P(T_{n+1} > t, Z_{n+1} = j \mid T_n = s, Z_n = i) = e^{-q_i t}\, r_{ij}$.

Für die ME und Homogenität von (X_t) benutzt man die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung: Ist $s > 0$, $N_s = n$, $W_s := s - S_n$, so wird ein neuer MEP $((T'_k, Z'_k),\ k \in \mathbb{N}_0)$ definiert durch $T'_0 := 0$, $Z'_0 := X_s = Z_n$, $T'_1 := T_{n+1} - W_s$, $Z'_k := Z_{n+k}$, $T'_k := T_{n+k}$ sonst.

Dieser Prozess ist unter $X_s = i$ stoch. unabhängig von $(X_u,\ 0 \le u \le s)$ und besitzt dieselbe Verteilung wie $((T_k, Z_k))$ unter $\{X_0 = i\}$. Daraus folgt die Markov-Eigensch. und „homogen“.

Bemerkung 3. Es kann sein, dass (S_n) einen Häufungspunkt $S_\infty := \lim_{n\to\infty} S_n$ besitzt. In diesem Fall ist $N_t = \infty$ für alle $t \ge S_\infty$ und man setzt $Z_\infty := \Delta$ (oder = „∞“), $\Delta \notin I$.
Es gilt: „(q_i) beschränkt“ $\Rightarrow$ $S_\infty = \infty$ P-f.s. $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^\infty q_{Z_k}^{-1} = \sum_{k=0}^\infty E(T_{k+1} \mid Z_k) = \infty$ P-f.s.

Bemerkung 4: Unter der Voraussetzung „$S_\infty = \infty$ P-f.s.“ kann man die ÜMF $(p_{ij}(t))$ zu dem in Satz MKs 4 konstruierten Prozess (X_t) induktiv berechnen. Es gilt nämlich

$$\boxed{p_{ij}(t,n) = \delta_{ij}\, e^{-q_i t} + \sum_{k\neq i} r_{ik} \int_0^t p_{kj}(t-s, n-1)\, q_i e^{-q_i s} ds,} \quad i,j \in I,\ t \ge 0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ p_{ij}(t,-1) := 0,$$

$p_{ij}(t,n)$: „$\le n$ Sprünge“. Aber auch damit hat man noch keinen handlichen Zugang zur ÜMF $(p_{ij}(t))$. Diesen erhält man erst durch die Ableitungen $p'_{ij}(t)$ (sofern diese existieren).

So ergibt sich durch Ableiten der Bedingung (C) $\mathbf{p}(s+t) = \mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t)$ nach s an der Stelle $s = 0$ die **(Kolmogorovsche) Rückwärts-Differentialgleichung** $\boxed{p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p'_{ik}(0)\, p_{kj}(t)}$.
(Die Ableitung nach t a.d.Stelle $t = 0$ ergibt die (sog.) Vorwärts-Dgl. $p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p'_{ik}(0)\, p_{kj}(t)$.)
Doch hierzu benötigen wir die Ableitungen $p'_{ij}(0)$ und (für allg. HMKS) deren Existenz.

Satz MKs 5: Ist (X_t) nach Satz MKs 4 aus $(p_i(0))$, (r_{ij}) und (q_i) konstruiert, und $p_{ij}(\cdot)$ die zugehörige ÜMF, so existiert $q_{ij} := p'_{ij}(0)$ für alle $i,j \in I$ und es gilt:

$$\boxed{q_{ii} := p'_{ii}(0) = -\,q_i} \quad \text{und} \quad \boxed{q_{ij} := p'_{ij}(0) = q_i\, r_{ij} \ \text{ für } i \neq j}. \quad (r_{ii} = 0!)$$

Beweis: [jeweils $h \to 0$, $P_i(\cdot) := P(\cdot \mid X_0 = i)$, $1 - e^{-q_i h} = q_i h + o(h)$]
(a) $\varepsilon(h) := \frac{1}{h} P_i(\ge 1 \text{ Sprung in } (0,h]) = \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h) = \frac{1}{h}(1 - e^{-q_i h}) \to q_i < \infty$,
(b) $\delta_j(h) := \frac{1}{h} P_i(\ge 2 \text{ Sprünge in } (0,h], X_h = j) = \frac{1}{h} P_i(S_2 \le h, X_h = j) \le \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h, T_2 \le h) =$
$= \sum_{k\in I} \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h, T_2 \le h \mid Z_1 = k)\, P_i(Z_1 = k) = \frac{1}{h}(1 - e^{-q_i h}) \sum_k (1 - e^{-q_k h})\, r_{ik} \overset{maj.K.}{\to} q_i \cdot 0$,
(c) $\frac{1}{h}[p_{ii}(0) - p_{ii}(h)] = \frac{1}{h}[1 - P_i(X_h = i)] = \frac{1}{h}[1 - (P_i(T_1 > h) + h\,\delta_i(h))] = \varepsilon(h) - \delta_i(h) \to q_i$.
(d) $\frac{1}{h}[p_{ij}(h) - p_{ij}(0)] = \frac{1}{h} P_i(X_h = j) = \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h, S_2 > h, Z_1 = j) + \delta_j(h) =$
$= \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h, Z_1 = j) - \frac{1}{h} P_i(T_1 \le h, T_2 \le h - T_1, Z_1 = j) + \delta_j(h) \to q_i r_{ij} + 0^* + 0$ (* wie $\delta_j(h)$).

Definition MKs 6: Eine $I\times I$-Matrix (q_{ij}) heißt **[konservative] Übergangs-Raten-Matrix** (ÜR-Matrix, Q-Matrix, Generator), falls $\boxed{q_{ij} \ge 0 \text{ für } i \neq j \ \text{ und } \ \sum_{j\neq i} q_{ij} \le [=] - q_{ii} =: q_i < \infty}$.
Eine **HMKS** heißt **konservativ**, falls $(p'_{ij}(0))$ existiert und konservative ÜR-Matrix ist.

Folgerung MKs 7: (a) Es sei $q_i \ge 0, i \in I$, (r_{ij}) stoch. Matrix mit $r_{ii} = 0$ für $q_i > 0$, $= 1$ für $q_i = 0$. Dann ist die mit (T_k, Z_k) konstruierte HMKS konservativ mit $q_{ij} = r_{ij}\, q_i$ $(i \neq j)$, $q_{ii} = -q_i$.
(b) Ist (q_{ij}) konserv. ÜR-Matrix, so ist $q_i := -q_{ii} \ge 0$ und (r_{ij}) mit $r_{ij} := (1 - \delta_{ij})\, q_{ij}/q_i$ $(q_i > 0)$, $r_{ii} = 1$ $(q_i = 0)$ eine stoch. Matrix. Mit Startvert. $(p_i(0))$ ex. dann eine HMKS mit $p'_{ij}(0) = q_{ij}$.

Bemerkung: Eine nicht-konserv. ÜR-Matrix wird durch fiktiven absorb. Zustand Δ konserv.