6. Grenzwertsätze für HMK

Wann konvergiert $p_{ij}^{(n)}$ und wogegen? Daraus folgt die Konv. von $P(X_n=j)=\sum_i P(X_0=i)\,p_{ij}^{(n)}$.
Vorbemerkung : Falls $p_{ii}^{(n)}$ konvergiert, dann auch $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_{ii}^{(n)}$ (Césaro-Limes) gegen den selben Wert (s. 6.1), die langfristig je Takt erwartete Anzahl der Besuche in i ($=1/m_{ii}$, s. 6.2).

6.1 Hilfssatz: (Grenzwertsatz für die gleitende Gewichtung einer Folge durch Faltung)
Sei $a_n\ge 0,\ a_n/\sum_{k=0}^n a_k\to 0,\ b_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0$ (z.B. $\sum_{k=0}^n a_k<\infty$ / (a_n) beschr. / $a_n\equiv 1$). Dann gilt:
(a) $\overline{\lim}\,(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}/\sum_{k=0}^n a_k)\le\overline{\lim}\,b_n$, $\underline{\lim}\,(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}/\sum_{k=0}^n a_k)\ge\underline{\lim}\,b_n$,
(b) Aus $b_n\to b$ folgt $\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}/\sum_{k=0}^n a_k\to b$.

Beweis: (a) Sei $b:=\overline{\lim}\,b_n$: Sei b endlich ($b=+\infty$ ist trivial, $b=-\infty$ analog, $\underline{\lim}$ entspr.).
$\exists N: b_n-b\le\varepsilon\ \forall n\ge N,\ \exists M\in\mathbb{R}: b_n-b\le M\ \forall n \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k(b_{n-k}-b)\le\sum_{k=0}^{n-N}a_k\cdot\varepsilon+\sum_{k=n-N+1}^n a_k\cdot M$
$\Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots}\le\varepsilon\cdot 1+(M-\varepsilon)\sum_{m=0}^{N-1}a_{n-m}/\sum_0^n a_k \Rightarrow \overline{\lim}\frac{\cdots}{\cdots}\le\varepsilon$, da $a_{n-m}/\sum_0^n a_k\le a_{n-m}/\sum_0^{n-m}a_k\to 0$.

6.2 Satz (Spezialfall des allgemeinen Grenzwertsatzes):
(a) Sei $i,j\in I$, j transient $\Rightarrow p_{ij}^{(n)}\to 0$, (b) i rekurrent, $d_i=1\Rightarrow \underline{p_{ii}^{(n)}\to\frac{1}{m_{ii}}}$ $(n\to\infty)$.

Beweis: (a) folgt aus 4.5 (c): j transient $\Rightarrow E_{ij}=\sum_{n=1}^\infty p_{ij}^{(n)}<\infty\Rightarrow p_{ij}^{(n)}\to 0$.
(b) „$p_{ii}^{(n)}\to\frac{1}{m_{ii}}$" ist das „Erneuerungstheorem", angewandt auf die Folge $\tau_i^{(1)}:=\tau_i,\tau_i^{(2)},\tau_i^{(3)},\ldots$.
Wir zeigen (b1): Wenn $p_{ii}^{(n)}$ konvergiert, dann gegen $\frac{1}{m_{ii}}$. [zu (b2): „$p_{ii}^{(n)}$ konv." s. Ern.theorie]
Sei $r_n:=P(\tau_i>n|X_0=i)$, dann gilt $m_{ii}=E(\tau_i|X_0=i)=\sum_{n=0}^\infty P(\tau_i>n|X_0=i)=\sum_{n=0}^\infty r_n$.
Aus $\sum_{k=0}^n r_k\, p_{ii}^{(n-k)}=1$ (*) (s.u.) folgt mit 6.1 $\underline{\lim}\,p_{ii}^{(n)}\le\frac{1}{m_{ii}}\le\overline{\lim}\,p_{ii}^{(n)}$, also (b1).
(*) folgt mit Methode des *letzten* Besuchs: $1=\sum_{k=0}^n P($bis n letzter Besuch in i z.Zt. $n-k|X_0=i)$
$=\sum_{k=0}^n P(X_{n-k}=i$, nächste Rückkehrzeit $\overline{\tau}_i>k|X_0=i)=\sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)}\,P(\overline{\tau}_i>k|X_{n-k}=i,X_0=i)$
$\overset{(ME)}{=}\sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)}\,P(\tau_i>k|X_0=i)=\sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)}\,r_k$.

6.3 Allgemeiner Grenzwertsatz: Sei $i,j\in I$, $d_j=$ Periode von j. Dann gilt $(n\to\infty)$:
(a1) $p_{jj}^{(nd_j)}\to\frac{d_j}{m_{jj}}$, **(a2)** $p_{ij}^{(nd_j+r)}\to\sum_{k=0}^\infty f_{ij}^{(kd_j+r)}\cdot\frac{d_j}{m_{jj}}$, $1\le r\le d_j$. **(a3)**) $(d_j=1)$ $p_{ij}^{(n)}\to f_{ij}^*\cdot\frac{1}{m_{jj}}$.
(b) j rekurrent, $i\in K(j), j\in K_r(i)\Rightarrow p_{ij}^{(nd_j+r)}\to\frac{d_j}{m_{jj}}$, $p_{ij}^{(m)}=0$ für $m\ne r \pmod{d_j}$.
(c) j transient oder null-rekurrent $\Rightarrow p_{ij}^{(n)}\to 0$.

Beweis: (1) $i=j$, i rekurrent: Dann ist $\widetilde{X}:=(X_0,X_{d_i},X_{2d_i},\ldots)$ mit $P(X_0\in K_0(i))=1$ nach 3.7 (d) eine HMK mit Periode 1 (und i ist rekurrent). $\Rightarrow$ (mit 6.2 (b)) $p_{ii}^{(nd_i)}=\widetilde{p}_{ii}^{(n)}\to\frac{1}{\widetilde{m}_{ii}}=\frac{d_i}{m_{ii}}$.
(2) Allg. gilt $p_{ij}^{(nd_j+r)}=\sum_{\ell=0}^{(nd_j+r)}f_{ij}^{(\ell)}p_{jj}^{(nd_j+r-\ell)}$ (ℓ ist Zeitpunkt des ersten Besuchs in j).
Für Summanden >0 gilt $r-\ell=0 \pmod{d_j}$, also $p_{ij}^{(nd_j+r)}=\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(kd_j+r)}p_{jj}^{(nd_j-kd_j)}$.
Mit (1) folgt (a) für „j rekurrent". Aus 6.2 (a) und $1/m_{jj}=0$ für „j null-rekurrent" folgt (c).

6.4 Folgerung: (a) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)}\to f_{ij}^*/m_{jj}$ (**Césaro-Limes**: $a_n\to a\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_1^n a_i\to a$ (**C**)).
(b) Positive Rekurrenz und Null-Rekurrenz sind Klasseneigenschaften.
(c) In einer **endlichen** HMK ex. mind. eine positiv-rekurrente und keine null-rekurrente Klasse.

Beweis: (a) j rek., $d:=d_j$: $\frac{1}{md+r}\sum_{k=1}^{md+r}p_{ij}^{(k)}=\frac{m}{md+r}\sum_{\varrho=1}^d\left(\frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1}p_{ij}^{(\ell d+\varrho)}\right)+\text{Rest}(\frac{1}{m}p_{ij}^{(md+1)}+\ldots)$
$\xrightarrow{6.3(a2),(C)}\frac{1}{d}\sum_{\varrho=1}^d\left(\frac{d}{m_{jj}}\sum_{k=0}^\infty f_{ij}^{(kd+\varrho)}\right)+0=f_{ij}^*/m_{jj}$, da $\sum_{\varrho=1}^d\sum_{k=0}^\infty f_{ij}^{(kd+\varrho)}=f_{ij}^*$.
(b) Sei j pos.-rek., $i\in K(j)\Rightarrow\lim p_{jj}^{\ell d_j}>0$ und es ex. m,n mit $p_{ii}^{(m+\ell d_j+n)}\ge p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(\ell d_j)}p_{ji}^{(n)}>0$.
(c1) Nach 3.5 (d) ex. mind. 1 abgeschlossene und nach 4.7 (b) rekurrente Klasse.
(c2) Sei j rek., $i\in K(j)$. Wegen $\sum_{j\in K(i)}p_{ij}^{(n)}=1$ ist $1=\sum_{j\in K_r(i)}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd_j+r)}=\sum_{j\in K_r(i)}\frac{d}{m_{jj}}\ \forall r$, also können nicht alle Zustände in $K(j)$ null-rekurrent sein und damit nach (b) keiner.