## 5. HMK im Gleichgewicht, stationäre Verteilungen

An Stelle des mittelfristigen Verhaltens einer HMK (Rechenaufwand $P(X_n=j)$ für alle $n$ und $j$) genügt meist das Langzeitverhalten. Beobachtung: Immer wieder dieselben Zustände mit relativ konstanten relativen Häufigkeiten $h_n(i)$.

**5.1 Beispiel:** Länge einer Warteschlange, 0 bis 7 Kunden, 900 Zeittakte (Ankünfte und Abgänge als senkrechte Linien). Die relative Häufigkeit der Zustände $0, 1, 2, \ldots$ bleibt jeweils ziemlich konstant. Der Prozess ist (langfristig) „im Gleichgewicht“.

Länge einer Warteschlange

(e)ps-File unter
/home/huebner/l05.eps ($\ell$05)
oder Link 'K6-Bild'

**5.2 Definition:** Eine HMK $(X_n)$ ist **im Gleichgewicht**, wenn $P(X_n=i) := \pi_i$ unabhängig von $n$ ist $(\forall i)$. Eine Z-Dichte $(\pi_i,\, i\in I)$ heißt **Gleichgewichtsverteilung (GGV)** oder **stationäre Verteilung** der HMK $(X_n)$ bzw. zu $\mathbf{P}$, wenn aus $P(X_0 = i) := \pi_i,\ i \in I$, auch $P(X_n=i):=\pi_i,\ i\in I, n\geq 0$, folgt.

**5.3 Satz (Berechnung der GGV):** (a) $(\pi_i)$ ist genau dann GGV zu $\mathbf{P} = (p_{ij})$, wenn gilt:

$$\pi_j = \textstyle\sum_{i\in I} \pi_i\, p_{ij} \quad \text{für alle } j\in I \qquad \textbf{(G)}, \qquad \pi_j \geq 0 \quad \text{für alle } j\in I \quad \text{und} \quad \textstyle\sum_{j\in I} \pi_j = 1 \qquad \textbf{(N)}.$$

(b) Eine HMK im Gleichgewicht ist ein **stationärer Prozess** (s. § 1, Klassifikation 3 (f)).

Beweis: (a) folgt direkt aus $P(X_{n+1}=j) = \sum_{i\in I} P(X_n=i)\, p_{ij}$ (beide Richtungen).
(b) $P(X_m=i_0, X_{m+1}=i_1, \ldots, X_{m+n}=i_n) = \pi_{i_0}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$, unabhängig von $m$.

**5.4 Bemerkung:** Eine Lösung $(\geq 0)$ von (G) allein heißt **invariantes** oder **stationäres Maß**.

**5.5 Beispiel:** Von zwei Telefonleitungen seien $i=0,1,2$ belegt. Als Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{für } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ erhält man } \begin{array}{ll} (\mathrm{G}_0) & \pi_0 = 0.7\,\pi_0 + 0.2\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 \\ (\mathrm{G}_1) & \pi_1 = 0.3\,\pi_0 + 0.5\,\pi_1 + 0.4\,\pi_2 \\ (\mathrm{G}_2) & \pi_2 = \phantom{0.3\,\pi_0 +{}} 0.3\,\pi_1 + 0.5\,\pi_2 \end{array} \quad \text{und} \quad (\mathrm{N}) \ \ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1.$$

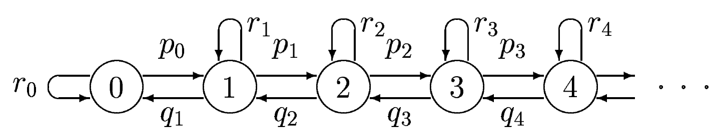
(Man beachte, dass spaltenweise, nicht zeilenweise addiert werden muss.)
Als eindeutige Lösung folgt $\pi_0=13/37\approx 0.35,\ \ \pi_1=15/37\approx 0.41,\ \ \pi_2=9/37\approx 0.24$.
Im Gleichgewicht sind also mit Wahrscheinlichkeit $\pi_2=24\%$ beide Leitungen belegt.

Zur Vereinfachung des (oft großen) Gleichungssystems (G) kann folgendes „Schnittprinzip“ dienen.

**5.6 Folgerung (Schnittprinzip):** (a) Sei $K\subset I$. Im Gleichgew. gilt „$P(X_n\in K)$ unabh. von $n$“ und daraus folgt $\quad \sum_{i\in K} \sum_{j\in K^c} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in K} \sum_{j\in K^c} \pi_j p_{ji}$ **(S)**.
(b) Ist der Ü-Graph linear (oder ein Baum), dann wird (G) „lokal“: $\quad \pi_i\, p_{ij} = \pi_j\, p_{ji},\ \forall\, i, j$ **(L)**.

Beweis: Im Gleichgewicht sind die W. für einen Übergang von $K$ nach $K^c$ und umgekehrt gleich.

**5.7 Beispiel** (s. 4. u. 4C. Bsp. 3):
Warteschlangenlänge, $I:=\mathbb{N}_0$,
$p_i:=p_{i,i+1},\, q_i:=p_{i,i-1},\, r_i:=p_{ii}$,




$q_i+r_i+p_i=1,\ q_0=0$: Mit (L): $\pi_{n-1}\, p_{n-1} = \pi_n\, q_n,\ \Rightarrow\ \pi_n = \pi_0 \prod_{m=1}^{n} (p_{m-1}/q_m) =: \pi_0\, \alpha_n\ \ (\alpha_0=1)$,
mit (N): $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$, dann ex. e. GGV, falls $=\infty$, ex. keine.
Speziell: $p_n=p,\, q_n=q \Rightarrow \alpha_n=(p/q)^n,\ p<q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1/(1-p/q),\ \Rightarrow\ \pi_n=(1-p/q)(p/q)^n$.

**5.8 Folgerung:** Bei einer HMK mit GGV $(\pi_j)$ gilt: (a) $\pi_j > 0$, falls $\pi_i > 0$ und $i \rightsquigarrow j$,
(b) $\pi_j>0\ \forall j\in K(i)$ oder $\pi_j=0\ \forall j\in K(i)$, (c) $\pi_j=0\ \forall j\in K(i)$, falls $K(i)$ nicht abgeschl. (Schnitt!)

**Bemerkung:** Zu Existenz u. Eindeutigkeit von GGV (u.ä.) siehe Abschnitt 6.