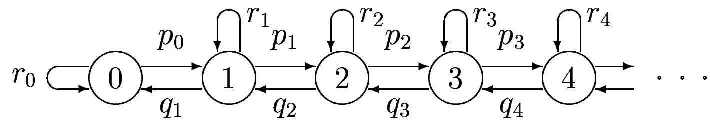
4. Rekurrenz und Transienz

Bisher: Erreichbarkeit – ja oder nein? Jetzt: – W(„ja“) = ? – Wann im Mittel? – Wie oft?

Beispiele: 1. Rückstellungen eines Versicherers, $I = \mathbb{N}_0$, $i=0 \mathrel{\widehat{=}}$ „Ruin“: – W(„Ruin“)? – Wann?

2. Wasserstand eines Staudamms, $I = \{0, 1, \ldots, r\}$: – W(Überlauf)?, W(„läuft leer“)? (Fische!).

3. Warteschlangenlänge, $I := \mathbb{N}_0$,
$p_i := p_{i,i+1}, q_i := p_{i,i-1}, r_i := p_{ii}$,
$q_i + r_i + p_i = 1$, $q_0 = 0$: Wann leer?



4. Symmetrische „Irrfahrt“ auf $I = \mathbb{Z}$, $p_i = q_i = \frac{1}{2}$: Rückkehrzeit? Entsprechend auf $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.

5. Einfaches Beispiel: $I = \{1, 2, 3\}$, $p_{11} = .2, p_{12} = .4, p_{13} = .4, p_{22} = 1, p_{31} = .4, p_{33} = .6$, sonst 0.
Wie groß ist die W (f^*_{ij}), bei Start in $i=1$ irgendwann nach $j = 1, 2, 3$ zu kommen?
Wie lange wird es im Mittel dauern? Vermutung: $m_{11} = \quad m_{12} = \quad m_{13} = \quad ?$

4.1 Definition: (a) $\tau_j := \inf\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = j\}$ heißt **Ersteintrittszeit** (in j) ($\inf \emptyset = \infty$),
$f^{(n)}_{ij} := P(\tau_j = n | X_0 = i) = P(X_n = j, X_s \neq j, 0 < s < n | X_0 = i)$, die W., erstes j z.Zt. n,
$f^*_{ij} := P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = P(\exists\, n > 0 \text{ mit } X_n = j | X_0 = i)$, die W., überhaupt nach j zu kommen,
$m_{ij} := E(\tau_j | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f^{(n)}_{ij} + \infty\,(1 - f^*_{ij})$ heißt **mittlere Übergangs-/Rückkehrzeit**.
(b) $i \in I$ heißt **rekurrent**, falls $f^*_{ii} = 1$, andernfalls **transient**.
Ein rekurrenter Zustand i heißt **positiv rekurrent**, falls $m_{ii} < \infty$, sonst **nullrekurrent**.

Bemerkung: 1. Bei $m_{ii} < \infty$ ist die mittlere Aufenthalts-W. in i $(= \frac{1}{m_{ii}}) > 0$, daher pos. rek..
2. Falls $P(X_0 = i) = 0$, sei $P(\ldots X_n \ldots | X_0 = i)$ def. durch $P(\ldots X_{\ell+n} \ldots | X_\ell = i)$.

4.2 Berechnung von $f^{(n)}_{ij}$, f^*_{ij}, m_{ij}: (a) $f^{(1)}_{ij} = p_{ij}$, für $n > 1$: $f^{(n)}_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f^{(n-1)}_{kj}$.
(b) $f^*_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{ij}$, $f^*_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f^*_{kj}$. (c) $m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$.

4.3 Folgerung: (a) $i \rightsquigarrow j \iff f^*_{ij} > 0$ (Beweis?), (b) i transient $\Longrightarrow m_{ii} = \infty$ (nicht umgek.).

Beispiel 5: $f^*_{11} = 0.6$, $f^*_{22} = 1$, $f^*_{33} = 0.8$, $m_{12} = 5$, $m_{22} = 1$, $m_{31} = 2.5$, $m_{32} = 7.5$, sonst ∞, also ?

Beispiel 4, Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $f^*_{i0} = ?$ Für $i \geq 0$ induktiv $f^*_{i+1,0} = f^*_{10} + i(f^*_{10} - 1)$.
Daraus $f^*_{10} = 1$, ebenso für $i < 0$, also auch $f^*_{00} = \frac{1}{2}(f^*_{10} + f^*_{-1,0}) = 1$.
Aus $m_{i0} = |i|\, m_{10}$ (warum?) und $m_{10} = 1 + \frac{1}{2} m_{20} = 1 + m_{10}$ folgt $m_{10} = m_{i0} = \infty$.

4.4 Definition: $A_j := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}$ = Anzahl der Besuche in j, dazu Verteilung und Erw.wert:
$g^{(k)}_{ij} := P(A_j \geq k | X_0 = i)$, $g_{ij} := P(A_j = \infty | X_0 = i)$, $E_{ij} := E(A_j | X_0 = i)$.

4.5 Folgerung: (a) $g^{(1)}_{ij} = f^*_{ij} \geq g^{(k)}_{ij} \downarrow g_{ij}$, $g^{(k)}_{ij} = f^*_{ij}\, g^{(k-1)}_{jj} = f^*_{ij} (f^*_{jj})^{k-1}$, $g_{ij} = f^*_{ij}\, g_{jj} = f^*_{ij} (f^*_{jj})^{\infty}$.
(b) $E_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}_{ij} = f^*_{ij} / (1 - f^*_{jj})$, aus $E_{jj} = \infty\, [<\infty]$ folgt $f^*_{jj} = 1\, [f^*_{ij} = E_{ij}/(1 + E_{jj})]$.
(c) **Rekurrenz-Kriterium:** i rekurrent [transient] $\iff g_{ii} = 1\, [0] \iff E_{ii} = \infty\, [<\infty]$.

Beweis zu 4.5: (a1) aus Def., (a2) $g^{(k)}_{ij} = P(A_j \geq k | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_j = n, A_j \geq k | X_0 = i) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_j = n | X_0 = i) P(A_j \geq k | \tau_j = n, X_0 = i) \overset{(?)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{ij}\, P(A_j \geq k-1 | X_0 = j) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{ij}\, g^{(k-1)}_{jj} = f^*_{ij}\, g^{(k-1)}_{jj} = \ldots = f^*_{ij}\, (f^*_{jj})^{k-1}$, auch für $k \to \infty$.
(b2) mit $EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ für $X(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$, (b3) aus (a), (b4) aus (b3), (c) aus (a),(b).

Bemerkung: 1. Der Beweis an der Stelle (?) folgt aus der „starken Markov-Eigenschaft“, d.h. nach dem Ereignis $\{\tau_j = n\}$ (wobei τ_j eine „Stoppzeit“ ist) beginnt die HMK neu als (X'_n), aber mit Start in j (s.u.).
2. $g_{ij} = (0 \text{ oder } 1)$ folgt auch aus dem 0-1-Gesetz, ebenso „$\sum p^{(n)}_{ij} < \infty \Rightarrow g_{ij} = 0$“, aber die Umkehrung „$\sum p^{(n)}_{ij} = \infty \Rightarrow g_{ij} = 1$“ enthält die Unabhängigkeit der Prozessverläufe zwischen den Besuchen in j.