4 D. Über die Informations-Struktur von Sigma-Algebren

1. Durch ZV $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ werden Ereignisse beschrieben: $X^{-1}(B) := \{X \in B\} \in \mathcal{A}$ und $\sigma(X) := \{X^{-1}(\mathcal{B})\} := \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ ist eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.

2. Ebenso ist für $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\times_{t=1}^n \mathcal{X}, \otimes_{t=1}^n \mathcal{B})$ die σ-Algebra $\sigma(X) = \sigma(X_1, \ldots, X_n) := X^{-1}(\otimes_{t=1}^n \mathcal{B}) = \sigma(X^{-1}(\times_{t=1}^n \mathcal{B}) = \sigma(\bigcup_{t=1}^n X_t^{-1}(\mathcal{B}))$ definiert.

4.9 Satz: Sind ZV $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ gegeben, dann gilt:
$\sigma(X) \subset \sigma(Y) \iff \exists\ g : Y(\Omega) \to X(\Omega)$, g $\mathcal{C}, \mathcal{B}$-messbar, mit $X = g(Y)$.

Beweis (hier nur für $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (I\!R, I\!B)$ bzw. $(I\!R^n, I\!B^n)$, allg. sofern $\{x\} \in \mathcal{B}\ \forall x \in \mathcal{X}$):
Ist $X := \sum_1^m a_i 1_{A_i}$, $A_i \in \sigma(Y)$, so ist $A_i = Y^{-1}(A_i')$, $A_i' \in \mathcal{C}$ und $X = \sum_1^m a_i 1_{A_i'}(Y)$.

Falls $X \geq 0$, dann ist X darstellbar als aufsteigender Limes $\lim_{n\to\infty} \sum_1^{m_n} a_i^{(n)} 1_{A_i'}^{(n)}(Y)$, also als $X = g(Y)$ mit $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-messbarem g. Für beliebige Vorzeichen zerlegt man $X = X^+ - X^-$.

Bemerkung: $X_1, \ldots, X_n$ gibt Auskunft über das Eintreten von $A\ \forall A \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
Man kann $\mathcal{A}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ als Informations-Struktur von $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$ bezeichnen: das Eintreten von $A \in \mathcal{A}_n$ ist durch Y bestimmt (wg. $A = Y^{-1}(A')$ für ein $A' \in \mathcal{C}$).

Es gilt also „$X = (X_1, \ldots, X_n)$ $\mathcal{A}_n$-messbar“, d.h. „$\mathcal{A}_n^0 := \sigma(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_n$“
bzw. „Info-Struktur von X enthalten in Info-Struktur von Y“

ist äquivalent zu

„$\exists g$, $\mathcal{C}^n$-$\mathcal{B}^n$-messbar mit $X = g(Y)$“, d.h. „X ist durch Y vollständig bestimmt“.

4 E. Filtration und adaptierte Prozesse

1. Für einen stochastischen Prozess $X = (X_t,\ t \in T)$ mit $T \subset I\!R$ definiert man:
$\mathcal{A}_t^0 := \sigma(X_s, s \leq t) := \sigma(\bigcup_{s\leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}))$. Jedes X_t ist $\mathcal{A}_t^0$-$\mathcal{B}$-messbar.
$(\mathcal{A}_t^0, t \in T)$ ist eine (in t) **aufsteigende Familie von σ-Algebren**.

2. Eine aufsteigende Familie $(\mathcal{A}_t, t \in T)$ heißt auch **Filtration** in $\mathcal{A}$.

3. Ein stochastischer Prozess (X_t) heißt $(\mathcal{A}_t)$-**adaptiert**,
wenn jedes X_t $\mathcal{A}_t$-$\mathcal{B}$-messbar ist, d.h. wenn $\mathcal{A}_t^0 \subset \mathcal{A}_t$.

4 F. Stoppzeiten und starke Markov-Eigenschaft

1. Sei $(X_n, n \in I\!N_0)$ ein stoch. Prozess, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\overline{I\!N}_0 := I\!N_0 \cup \{\infty\}$.
Eine ZV $\tau : \Omega \to \overline{I\!N}_0$ heißt **Stoppzeit** bzgl. (X_n), wenn $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n^0 = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$,
d.h., die zum Stoppen z. Zt. n benötigte Information steckt in $(X_1, \ldots, X_n)$.
Allgemeiner heißt τ Stoppzeit für $(X_t,\ t \in T), T \subset I\!R$ [bzw. bzgl. einer Filtration $(\mathcal{A}_t)$],
wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t^0$ [bzw. $\in \mathcal{A}_t$].

2. Zu einer Stoppzeit τ bzgl. (X_n) definiert man
den **Prae-τ-Prozess** $X_n^{(\tau)} := X_{\min(\tau,n)}$): der Prozess wird auf X_τ „eingefroren“,
den **Post-τ-Prozess** $({}^{(\tau)}X_n := X_{\tau+n})$ *: der Prozess beginnt z.Zt. τ in X_τ neu
(* mit $X_{\tau+n} := \Delta$, falls $\tau(\omega) = \infty$, wobei Δ ein fiktiver Zustand ist: „irrelevant“ o.ä.).

3. Für einen homogenen Markov-Prozess, also insbesondere für eine homogene Markov Kette gilt die **starke Markov-Eigenschaft:**
Der Post-τ-Prozess $({}^{(\tau)}X_n)$ hat das gleiche stochastische Verhalten wie (X_n), unabhängig von der Vergangenheit vor τ, in Formeln:
$P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i, (X_m^{(\tau)}) \in A') = P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i) = P((X_n) \in B' | X_0 = i)$,
$P(X_\tau = i_0, X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+n} = i_n) = P(X_\tau = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$.