4 B. Rekurrenz und Transienz als Klasseneigenschaft

4.6 Satz: (a) Ist i rekurrent [bzw. transient], dann sind auch alle $j \in K(i)$ rekurrent [transient].
(b) Ist i rekurrent und $i \rightsquigarrow j$, dann ist $f^*_{j\,i} = 1$, $j \in K(i)$ und es gilt $f^*_{ij} = 1$, $g_{ij} = 1$.

Beweis: (a) Mit 4.5 (c2) gilt $E_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, zu zeigen ist $E_{jj} = \infty$:
Für $j \in K(i)$ existiert m, l mit $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{ji}^{(\ell)} > 0$,
$\Longrightarrow E_{jj} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n+m+\ell)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(\ell)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(\ell)} p_{ij}^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$, also gilt „$i$ rek. $\Rightarrow$ j rek.“.
(b1) $f^*_{j\,i} = 1$: Nach Vorauss. existiert $i_0 = i, \ldots, i_n = j$ mit $p_{i_{k-1} i_k} > 0$, daraus folgt induktiv
$1 = f^*_{i_{k-1},i} = p_{i_{k-1},i} + \sum_{m \neq i} p_{i_{k-1},m} f^*_{mi} \leq \sum_m p_{i_{k-1},m} = 1$, also $f^*_{i_k,i} = 1$ mit $m = i_k$.
Aus (b1) folgt $j \rightsquigarrow i$, also (b2), mit $i \leftrightarrow j$ folgt (b3) und aus Folg. 4.5 (a) (b4).

Bemerkung: Wg. 4.6 (a) heißt mit i auch die Klasse $K(i)$ transient bzw. (pos./null-)rekurrent.
Dass auch „positiv rek.“ und „null-rek.“ Klasseneigenschaften sind, wird später gezeigt.

4 C. Ein (nützliches) Kriterium für Transienz/Rekurrenz

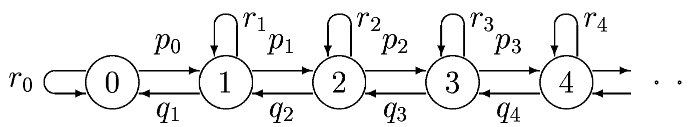
4.7 Satz: (a) $K(i)$ nicht abgeschlossen $\Longrightarrow$ $K(i)$ ist transient.
(b) $K(i)$ abgeschlossen, endlich $\Longrightarrow$ $K(i)$ ist rekurrent.

Beweis: (a) mit 4.6 (b), (b) $\exists j : g_{ij} > 0 \;\Rightarrow\; f^*_{jj} = 1$ mit 4.5(a).

Für den verbleibenden Fall „$K(i)$ abgeschlossen, nicht endlich“ ist offen: $f^*_{ii} = 1/>1$.

Die dazu benötigten Ideen und Schritte entwickeln wir an einem Beispiel:

Beispiel 3: Warteschlange.



Zu lösen ist nach 4.2 (b): $\boxed{(*_{ij}) \quad f^*_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f^*_{kj} \quad \forall i, j \in K(i).}$

Idee 1: Wegen 4.6(a) reicht die Bestimmung von f^*_{ii} für *ein* i_0, hier $i_0 = 0$, dazu alle f^*_{j0}.

Zu lösen ist also: $\boxed{(*_{j0}) \quad f^*_{j0} = p_{j0} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f^*_{k0} \quad \forall j \in K(i)}$ – immer noch ∞ viele Gleichungen.

Idee 2: f^*_{00} ergibt sich aus $(f^*_{j0}, j \geq 1)$ mit $(*_{00})$ $f^*_{00} = p_{00} + \sum_{k \neq 0} p_{0k} f^*_{k0}$.

Löse also $(*_{j0})$ für $j \geq \mathbf{1}$. Mit $y_j := f^*_{j0}$ $j \geq 1$ und $y_0 := 1$ ergibt sich $\boxed{(*_j) \quad y_j = \sum_{k \in I} p_{jk} y_k.}$

Für Beispiel 3: $y_j = q_j y_{j-1} + r_j y_j + p_j y_{j+1}$ $(j \geq 1)$ mit $r_j = 1 - q_j - p_j$ $(y_j \in [0,1])$.

Eingesetzt: $0 = q_j(y_{j-1} - y_j) - p_j(y_j - y_{j+1}) \Longleftrightarrow y_j - y_{j+1} = \frac{q_j}{p_j}(y_{j-1} - y_j) = \frac{q_j \cdots q_1}{p_j \cdots q_j}(1 - y_1) =: c_j \cdot d.$

Die Teleskop-Summe über $j = 1, \ldots, n$ und $1 - y_1 = d$ ergibt (mit $c_0 = 1$) $\boxed{1 - y_{n+1} = \sum_0^n c_j \cdot d.}$

Lösungen: **„trivial“** $y_j = 1 \,\forall j$, $d = 0$, **„minimal“** nur für $c := \sum_0^{\infty} c_j < \infty$ mit $d = 1/c$.
Die minimale Lösung ist bei $c < \infty$ die richtige für $y_j = f^*_{j0}$, Beweis s.u. Zusammenfassend gilt:

4.8 Satz: Sei $K(i)$ abgeschlossen, $i_0 \in K(i)$. Dann ist $(y_j := f^*_{ji_0}, j \neq i_0)$ die kleinste Lösung ≥ 0
von $\boxed{(*) \; y_j = \sum_{k \in K(i)} p_{jk} \, y_k, \; j \neq i_0, \; y_{i_0} = 1}$ ($f^*_{i_0 i_0}$ aus 4.2 (b), s.o. Idee 2) und es gilt:
$K(i)$ transient $\Longleftrightarrow$ $\exists j \in K(i), j \neq i_0$ mit $f^*_{ji_0} < 1$.

Beweis: (1): $(y_j := f^*_{ji_0})$ ist Lösung (s.o.), (2) kleinste Lösung: sei $\mathbf{P}$ wie $\tilde{\mathbf{P}}$ außer $\tilde{p}_{i_0 j} := \delta_{i_0 0}$.
$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{P}}^{(n)}\mathbf{y} \Rightarrow y_j \geq \tilde{p}_{ji_0}^{(n)} \cdot 1 = \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{ji_0}^{(k)} = \sum_{k=1}^n f_{ji_0}^{(k)} \uparrow f^*_{ji_0} \Rightarrow y_j \geq f^*_{ji_0}.$
(3): „$\Longleftrightarrow$“ mit $f^*_{i_0 i_0} = \ldots$ und $\sum p_{i_0 j} = 1$.

Bemerkung: Wir werden zeigen, dass es keine endlichen null-rekurrenten Klassen gibt.
Deshalb folgt pos. rekurrent/transient bei endl. $K(i)$ (bzw. I) schon aus abgeschl./nicht-abgeschl.