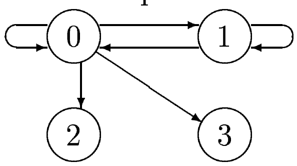
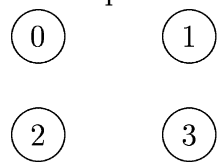
3. Strukturen von homogenen Markov-Ketten (Fortsetzung)

3.2 Darstellung durch Übergangs-Graph: Positive ÜW werden durch Pfeile dargestellt.

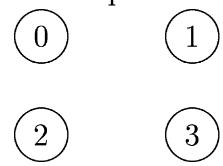
Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3



Beispiel 4: Ein Bauteil arbeite max. 5 „Takte“ ($i =$ Alter bei Taktbeginn), dann Wartung, bei Ausfall Reparatur, danach jeweils Alter 1, hier nur Übergangs-Graph:

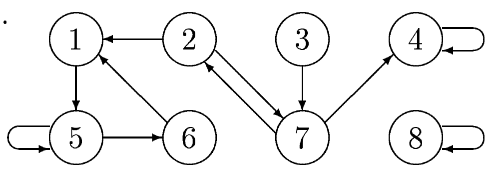
3.3 Definition: Erreichbarkeit der Zustände. Es sei $i, j \in I$. (Ist j von i aus erreichbar?)

(a) *i führt zu j* – $i \rightsquigarrow j$. $:\iff$ Es existiert $m > 0$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$.
(b) *i kommuniziert mit j* – $i \leftrightsquigarrow j$ $:\iff$ $i \rightsquigarrow j$ und $j \rightsquigarrow i$.
(c) *i äquivalent zu j* – $i \sim j$ $:\iff$ $i \leftrightsquigarrow j$ oder $i = j$.
(d) i heißt *absorbierend* $:\iff$ i führt nur zu sich selbst.

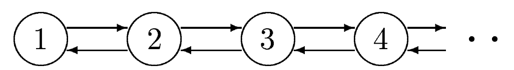
„$\sim$“ ist Äquivalenzrelation, denn aus $p_{ik}^{(m)} > 0$, $p_{kj}^{(n)} > 0$ folgt $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_\ell p_{i\ell}^{(m)} p_{\ell j}^{(n)} > 0$ (CH-K).
Dadurch wird I in (Äquivalenz-)**Klassen** eingeteilt. Sei $K(i)$ die Klasse von i.

Welche Klassen liegen in folgenden Beispielen vor? Auch absorbierende Klassen?

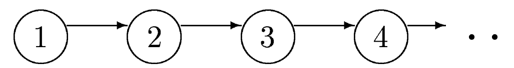
5.



6.



7.



3.4 Definition: Eine HMK heißt **irreduzibel**, wenn nur eine Klasse existiert, eine Teilmenge C von I heißt **abgeschlossen**, wenn $C \neq \emptyset$ und kein Weg aus C heraus führt.

3.5 Folgerung: (a) Für $C \subset I$, $\mathbf{P}_C := (p_{ij},\ i, j \in C)$ gilt: C ist abgeschl. $\iff$ $\mathbf{P}_C$ ist stochastisch.
(b) I ist abgeschlossen.
(c) Eine Klasse kann nach Verlassen nicht erneut betreten werden.
(d) Jede endliche abgeschlossene Menge enthält mind. eine abgeschl. Klasse.
(e) Sind $K_1, K_2, \ldots, K_r$ $(r \in \overline{I\!N}_0)$ die abgeschlossenen Klassen von I, R der Rest, so hat $\mathbf{P}$ nach Umordnen die nebenstehende Struktur.
(f) R endl., $\neq \emptyset \Rightarrow R$ nicht abg., also $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & K_1 & K_2 & \cdots & & R \\ \hline
K_1 & \mathbf{P}_{K_1} & & 0 & & \\
K_2 & & \mathbf{P}_{K_2} & & & 0 \\
\vdots & 0 & & \ddots & & \\ \hline
R & & & \mathbf{S} & & \mathbf{P}_R
\end{array}$$

In Beispiel 3 war $p_{ii}^{(n)}$ nur für gerade n positiv, sonst $= 0$, also „periodisch“.

3.6 Definition: $d_i := \mathrm{ggT}\{n \in I\!N^*, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ heißt **Periode** von i ($\mathrm{ggT}\,\emptyset = \infty$). Für $d_i < \infty$ heißt $K_r(i) := \{j \in K(i),\ p_{ij}^{(nd_i+r)} > 0$ für ein $n \in I\!N_0\}$, $1 \leq r \leq d_i$, die r-te **Unterklasse** von $K(i)$ bzgl i.

3.7 Folgerung: (a) „Periode“ ist e. Klasseneigenschaft.
(b) $K_1(i), \ldots, K_{d_i}$ ist eine disj. Zerlegung von $K(i)$.
(c) $\mathbf{P}_{K(i)}$ hat nach Umordnen folgende Struktur:
(d) Startet man in $K_r(i)$, so ist $X_0, X_{d_i}, X_{2d_i}, \ldots$ eine irreduzible HMK mit Periode 1.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & K_1(i) & K_2(i) & \cdots & & K_{d_i}(i) \\ \hline
K_1(i) & 0 & \mathbf{P}_{12} & & & 0 \\
K_2(i) & & 0 & \mathbf{P}_{23} & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & 0 & & & \mathbf{P}_{d_i-1,d_i} \\
K_{d_i}(i) & \mathbf{P}_{d_i 1} & & & & 0
\end{array}$$

3.8 Satz: Für alle $j \in K_r(i)$ existiert ein $N(j) \in I\!N^*$ mit $p_{ij}^{(nd_i+r)} > 0$ $\forall n \geq N(j)$.