2. Homogene Markov-Ketten mit diskreter Zeit – HMK

2.1 Definition: Eine **Markov-Kette mit diskreter Zeit** (kurz **MK**) ist ein Stochastischer Prozess X mit $T = \mathbb{N}_0$, abz. Zustandsraum, hier I, und der (diskreten) Markov-Eigenschaft

(ME) $P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$,
falls $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*,\ i_k \in I)$.

2.2 Folgerung: Für eine Markov-Kette (mit diskreter Zeit) gilt $(\ell, m, n \in \mathbb{N}^*, i_\nu, i, j \in I)$:
(a) $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) =: (*_{0,n})$.
(b) Wenn man die Gegenwart z.Zt. n (genau) kennt, ist die Zukunft von der Vorgeschichte st.u.
(c) $P(X_{\ell+m+n} = j | X_\ell = i) = \sum_{k \in I} P(X_{\ell+m} = k | X_\ell = i) P(X_{\ell+m+n} = j | X_{\ell+m} = k)$.

Beweis: (a) L.S. $= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \overset{(ME)}{=}$ r.S.,
(b) Geg. $G := \{X_n = i_n\}$, Verg. $A = \{(X_0, \ldots, X_{n-1}) \in A'\}$, Zuk. $B = \{(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in B'\}$,
i_n fest, $\Rightarrow P(B|AG) = \sum_{(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \in A'} \sum_{(i_{n+1}, \ldots, i_{n+m}) \in B'} (*_{0,n+m}) / \sum_{(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \in A'} (*_{0,n}) =$
$= \sum_{(i_{n+1}, \ldots, i_{n+m}) \in B'} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \ldots P(X_{n+m} = i_{n+m} | X_{n+m-1} = i_{n+m-1})$, unabh. von A,
(c) folgt aus (b) mit $P(X_{\ell+m+n} = j | X_\ell = i, X_{\ell+m} = k) = P(X_{\ell+m+n} = j | X_{\ell+m} = k)$.

2.3 Bemerkung: Die allg. Markov-Eigenschaft aus Klassif. 3(b) folgt aus (ME) (s. 2.1) mit 2.2(b).

2.4 Definition: Eine MK (X_n) heißt **homogen** (HMK), wenn $\forall i, j \in I, \forall n$ mit $P(X_{n-1} = i) > 0$
$P(X_n = j | X_{n-1} = i) =: p_{ij}$ unabh. von n. Es existiere (o.E.) $\forall i$ ein n mit $P(X_{n-1} = i) > 0$.

2.5 Folgerung: Sei X eine homogene Markov-Kette, $P(X_0 = i) =: p_0(i)$. Dann gilt:
(a) $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = p_0(i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1}, i_n}$,
(b) Die m-Schritt-ÜW $P(X_{n+m} = j | X_n = i) =: p_{ij}^{(m)}$ sind unabh. von n, falls $P(X_n = i) > 0$,
(c) Chapman-Kolmogorov-Gleichungen: $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in I$.

2.6 Rekursive Berechnung: (a) $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$.
(b) $p_n(j) := P(X_n = j) = \sum_{i \in I} p_0(i) p_{ij}^{(n)}$, $p_n(j) = \sum_{i \in I} p_{n-1}(i) p_{ij}$. (Was ist einfacher für $p_n(j)$?)

2.7 Matrix-Darstellung: ($\sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}$ ist Matrix-Produkt!) Ist $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $\mathbf{P}^{(n)} := (p_{ij}^{(n)})$
und $\mathbf{p}_n := (p_n(i))$ (Zeilen-Vektor), so gilt $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}$ (Chapman-Kolmogorov)
und durch Induktion $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, ebenso $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{P}$.

2.8 Bemerkung: (a) Man benutzt auch abzählbar-unendliche Matrizen (alles ist ≥ 0).
(b) Matrizen $\mathbf{P} = (p_{ij})$ mit $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1\ \forall i \in I$ nennt man **stochastische Matrizen**.
(c) Sind $\mathbf{P}$ und $\overline{\mathbf{P}}$ stochastische Matrizen, dann auch die Matrix $\mathbf{P}\,\overline{\mathbf{P}}$ (nachrechnen!).

3. Strukturen von homogenen Markov-Ketten

Beobachtungen des (Grenz-)Verhaltens von $\mathbf{p}_n$ an Beispielen.

1. (Lagerbestand $0, 1, 2, 3$, bei $0, 1$ auffüllen auf 3, $P(\text{Nachfrage} = 0/1/2/3) = 0.1/0.6/0.2/0.1$.)

$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} .1 & .2 & .6 & .1 \\ .1 & .2 & .6 & .1 \\ .3 & .6 & .1 & .0 \\ .1 & .2 & .6 & .1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{p}_0 := (\ .2\ .0\ .6\ .2)$	bzw.	$\mathbf{p}'_0 := (\ .2\ .0\ .2\ .6)$	$\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{p}'_n$
$\mathbf{p}_1 := (.22 .44 .30 .04)$		$\mathbf{p}'_1 := (.14 .28 .50 .08)$	konvergieren
$\mathbf{p}_2 := (.16 .32 .45 .07)$		$\mathbf{p}'_2 := (.20 .40 .35 .09)$	zum **selben**
$\mathbf{p}_\infty := (.18 .36 .40 .06)$		$\mathbf{p}'_\infty := (.18 .36 .40 .06)$	Grenzwert.

2. $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} .4 & .0 & .6 & .0 \\ .0 & .6 & .0 & .4 \\ .5 & .0 & .5 & .0 \\ .0 & .7 & .0 & .3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{p}_0 := (\ .2\ .0\ .6\ .2)$	bzw.	$\mathbf{p}'_0 := (\ .2\ .0\ .2\ .6)$	$\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{p}'_n$
$\mathbf{p}_1 := (.38 .14 .42 .06)$		$\mathbf{p}'_1 := (.18 .42 .22 .18)$	konvergieren zu
$\mathbf{p}_2 := (.36 .13 .44 .07)$		$\mathbf{p}'_2 := (.18 .38 .22 .22)$	**verschiedenen**
$\mathbf{p}_\infty := (.36 .13 .44 .07)$		$\mathbf{p}'_\infty := (.18 .38 .22 .22)$	Grenzwerten.

3. $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} .0 & .5 & .0 & .5 \\ .6 & .0 & .4 & .0 \\ .0 & .75 & .0 & .25 \\ .2 & .0 & .8 & .0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{p}_0 := (\ .2\ .0\ .6\ .2)$	$\mathbf{p}_4 := (.36 .13 .44 .07)$	$\mathbf{p}_n$
$\mathbf{p}_1 := (.04 .55 .16 .25)$	$\mathbf{p}_\infty := (.09 .51 .11 .29)$	konvergiert **nicht**
$\mathbf{p}_2 := (.38 .14 .42 .06)$	oder	(zwei
$\mathbf{p}_3 := (.10 .51 .10 .30)$	$\mathbf{p}_\infty := (.36 .13 .44 .07)$	Häufungspkte).

Kann man das unterschiedliche Verhalten aus der Struktur der Matrix vorhersagen?