

## Übungen zu Stochastische Prozesse I

### Hausaufgabenblatt 8:

Abgabe am Donnerstag, 22. 12. 05

#### Aufgabe H 8.1:

Bestimmen Sie für einen Erneuerungsprozess mit  $Y_2, Y_3, \dots \sim \mathcal{R}(0, 1)$

- (a) die R-Dichte  $g_F$  der stationären Startverteilung  $P^{Y_1^{\text{st}}}$  (Skizze!),
- (b) die Verteilungsfunktion  $G_F$ ,
- (c) den Erwartungswert  $EY_1^{\text{st}}$  von  $P^{Y_1^{\text{st}}}$ .

#### Aufgabe H 8.2:

Bei einem Erneuerungsprozess benötige die Ersetzung eines defekten Bauteils  $a$  Zeiteinheiten. Die Lebensdauer jedes Teils sei  $\text{Exp}(1/b)$ -verteilt.

Die ZV  $Y_2, Y_3, \dots$  setzen sich jeweils daraus zusammen.

Bestimmen Sie (allgemein) und skizzieren Sie für  $a = 2, b = 3$

- (a) die R-Dichte  $f^{Y_2}$  und die Vf  $F = F^{Y_2}$  zu  $Y_2$ .
- (b) die R-Dichte, die Vf und den Erw.wert der stationären Startverteilung.

Hinweis: Arbeiten Sie sorgfältig (in  $[0, a]$  **und** in  $(a, \infty)$ )!

#### Aufgabe H 8.3:

Es sei  $(S_n)$  ein Erneuerungsprozess mit  $\mu := EY_2 < \infty$ .

Es seien zusätzlich „Erträge“  $R_1, R_2, R_3, \dots$  definiert (ZV in  $\mathbb{R}$ ), wobei  $R_n$  der Ertrag in  $(S_{n-1}, S_n]$  sei.

Dabei seien  $R_1, R_2, \dots$  stoch. unabh.,  $R_2, R_3, \dots$  id. verteilt mit  $ER_2 < \infty$ .

Zeigen Sie für den „Ertrags-Prozess“  $R(t) := \sum_{n=1}^{N_t} R_n$ :

- (a)  $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m R_n \rightarrow ER_2$   $P$ -f.s. für  $m \rightarrow \infty$ ,
- (b)  $\frac{1}{t} R(t) \rightarrow \frac{1}{\mu} ER_2$   $P$ -f.s. für  $t \rightarrow \infty$ ,

Hinweis: Verwenden Sie (z.B.) Ideen aus dem Beweis zu „ $N_t/t \rightarrow 1/\mu$ “.