

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 8:

Abgabe am Donnerstag, 22. 12. 05

Aufgabe H 8.1:

Bestimmen Sie für einen Erneuerungsprozess mit $Y_2, Y_3, \dots \sim \mathcal{R}(0, 1)$

- (a) die R-Dichte g_F der stationären Startverteilung $P^{Y_1^{\text{st}}}$ (Skizze!),
- (b) die Verteilungsfunktion G_F ,
- (c) den Erwartungswert EY_1^{st} von $P^{Y_1^{\text{st}}}$.

Aufgabe H 8.2:

Bei einem Erneuerungsprozess benötige die Ersetzung eines defekten Bauteils a Zeiteinheiten. Die Lebensdauer jedes Teils sei $\text{Exp}(1/b)$ -verteilt.

Die ZV Y_2, Y_3, \dots setzen sich jeweils daraus zusammen.

Bestimmen Sie (allgemein) und skizzieren Sie für $a = 2, b = 3$

- (a) die R-Dichte f^{Y_2} und die Vf $F = F^{Y_2}$ zu Y_2 .
- (b) die R-Dichte, die Vf und den Erw.wert der stationären Startverteilung.

Hinweis: Arbeiten Sie sorgfältig (in $[0, a]$ **und** in (a, ∞))!

Aufgabe H 8.3:

Es sei (S_n) ein Erneuerungsprozess mit $\mu := EY_2 < \infty$.

Es seien zusätzlich „Erträge“ R_1, R_2, R_3, \dots definiert (ZV in \mathbb{R}), wobei R_n der Ertrag in $(S_{n-1}, S_n]$ sei.

Dabei seien R_1, R_2, \dots stoch. unabh., R_2, R_3, \dots id. verteilt mit $ER_2 < \infty$.

Zeigen Sie für den „Ertrags-Prozess“ $R(t) := \sum_{n=1}^{N_t} R_n$:

- (a) $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m R_n \rightarrow ER_2$ P -f.s. für $m \rightarrow \infty$,
- (b) $\frac{1}{t} R(t) \rightarrow \frac{1}{\mu} ER_2$ P -f.s. für $t \rightarrow \infty$,

Hinweis: Verwenden Sie (z.B.) Ideen aus dem Beweis zu „ $N_t/t \rightarrow 1/\mu$ “.