Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST



# Übungen zu Stochastische Prozesse I

**Hausaufgabenblatt 7:** Abgabe am Donnerstag, 15. 12. 05

**Aufgabe H 7.1:**

Es sei $S := \sum_{i=1}^{T} Y_i$ mit $T : \Omega \to \mathbb{N}_0$, $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$,
$T, Y_1, Y_2, \ldots$ seien stoch. unabh. und $Y_1, Y_2, \ldots$ identisch verteilt
Dann heißt $S$ „eine zufällige Summe“.

(a) Zeigen Sie:
Ist $g_T$ die erzeugende Funktion zu $T$ ( $g_T(s) := Es^T$, $s \in [0,1]$ )
und $\psi_{Y_i}$ die Laplace-Transformierte zu $Y_i$, dann gilt

$$\psi_S(t) = g_T\left(\psi_{Y_1}(t)\right).$$

Hinweise: 1. Für $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k$ gilt $\int f\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int f\, d\mu_k$ .
2. Zerlegen Sie $S$ mit $\{T = k\}$.

(b) Berechnen Sie $\psi_S$ für $Y_i \sim \text{Exp}(\alpha)$ und $T \sim \text{Geo}^+(p)$.

(c) Welche Verteilung hat S im Fall (b)?

**Aufgabe H 7.2:**

Eine Maschine sei abwechselnd „aktiv“ bzw. in „Reparatur“.
Die $i$-te „Aktivitätsdauer“ sei $Y_{i1}$, die $i$-te „Reparaturdauer“ sei $Y_{i2}$
mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_1$ und $F_2$. Der Zeitpunkt $t=0$ sei der Beginn einer Aktivitätsperiode. Es sei $X_t=1$, falls die Maschine arbeitet, sonst $X_t=0$. Man setze $Y_i := Y_{i1}+Y_{i2}$, $S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Die ZV $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}, \ldots$ seien stoch. unabhängig.

(a) Skizzieren Sie den Prozess $(X_t, t \geq 0)$ bis $S_2$. Ist $(X_t)$ regenerativ?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F$ und den Erwartungswert der Zeit $Y_i$ zwischen zwei Inspektionen.

(c) Prüfen Sie, ob die Erneuerungsgleichung für $Z(t) := P(X_t = 1)$ gilt, geben Sie $z(t)$ an und zeigen Sie $\int_0^{\infty} z(t)\, dt = EY_{11}$.

(d) Welche Vermutung haben Sie für $\overline{a} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} P(X_t=1)\, dt$ (falls der Limes existiert)? Begründung?

**Aufgabe H 7.3 entfällt wg. Test 1 * am 15. 12. 05**

* relvante Aufgaben: H 2.1, H 3.1-3, H 4.1-3, H 5.1-2, H 6,1-2.