Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 6: Abgabe: Donnerstag, 8. 12. 05

Aufgabe H 6.1: *

(a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierten

(a1) der Binomial-Verteilung $\mathrm{B}(n,p)$, sowohl direkt, als auch über Faltung,

(a2) der Poisson-Verteilung $\pi(\alpha)$, $(\alpha > 0)$.

(b) Überprüfen Sie die Faltungseigenschaft $\pi(\alpha) * \pi(\beta) = \pi(\alpha + \beta)$.

(c) Zeigen Sie mit (a) $\mathrm{B}(n, p_n) \to \pi(\alpha)$ für $n \to \infty$, $n \cdot p_n \to \alpha$.

Hinweis: $(1 + c_n/n)^n \to e^c$ für $n \to \infty$ und $c_n \to c$.

Aufgabe H 6.2: *

Berechnen Sie die Laplace-Transformierten

(a) der geometrischen Verteilung $\mathrm{Geo}^+(p)$ $(\, f(k) = p(1-p)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^* \,)$,

(b) der Standard-Normal-Verteilung $\mathcal{N}(0,1)$ (Ergebnis: $\psi_X(t) = e^{t^2/2}$),

(c) der (allgemeinen) Normal-Verteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

(d) Überprüfen Sie die Faltungseigenschaft

$$\mathcal{N}(a, \sigma^2) * \mathcal{N}(b, \tau^2) = \mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \tau^2).$$

Aufgabe H 1.3: *

Zeigen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformierten (LT)
den Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace (für Folgen $X_1, X_2, \ldots$ von stochastisch unabhängigen Bernoulli(p)-Versuchen):

Die Standardisierung $Z_n := (S_n - ES_n)/\sqrt{\mathrm{Var} S_n}$
der Summe $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ist näherungsweise $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt
d.h. für $n \to \infty$ gilt $P^{Z_n} \to \mathcal{N}(0,1)$ $(\Leftrightarrow F^{Z_n}(t) \to \Phi(t),\ t \in \mathbb{R}\,)$.

Anleitung: (1) Bestimmen Sie die LT $\psi_{X_1 - p}(t)$ von $X_1 - p$.

(2) Entwickeln Sie $\psi_{X_1-p}(t)$ in eine Potenzreihe bis t^2, dann $+\ t^3(\ldots)$.

(3) Geben Sie mit dieser Darstellung $\psi_{S_n - np}(t)$ an.

(4) Bestimmen Sie daraus ψ_{Z_n} (ohne die Struktur zu ändern).

(5) Lassen Sie jetzt n gegen ∞ gehen (vgl. Hinweis zu H 6.1 (d)).

* Geben Sie jeweils die benutzte Eigenschaft der Laplace-Trafo an.