Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 5: Abgabe: Donnerstag, 1. 12. 05

Aufgabe H 5.1:

In einem Bediensystem mit 1 Bediener (= 1 Bedienplatz) und 1 Warteplatz komme je Takt – unabhängig von den anderen Takten –
entweder mit W. p ein Kunde an **oder** es geht mit W. q ein Kunde ab
– falls einer da ist – oder es geschieht nichts (mit W. $r=1-p-q$).
Wenn beide Plätze belegt sind, geht ein ankommender Kunde sofort ohne Bedienung ab. Es sei $p>0$ und $q>0$.

(a) Skizzieren Sie den Ü-Graph.

(b) Für welche Werte p, q existiert eine GGV? Wie lautet sie?

(c) Berechnen Sie im Gleichgewichtsfall die W., dass zwischen X_{n-1} und X_n
   (c1) ein bedienter, (c2) ein unbedienter Kunde abgeht.

(d) Wieviele Kunden werden im Mittel je Takt bedient?

(e) Welchen Teil seiner Zeit (in %) hat der Bediener (im Mittel) nichts zu tun?

Aufgabe H 5.2:

Gegeben sei das Bediensystem aus Aufg. H 4.2, modelliert als HMK (X_n).
(Dort gilt $0<p_{i,i+1}=p<p_{i+1,i}=q$ mit der Annahme, dass in einem Takt **nicht** sowohl ein Kunde ankommen, als auch ein Kunde abgehen kann.)
Sie beobachten das System im Gleichgewicht, beginnend zum Zeitpunkt n_0.

(a) Sei Y die Zeit von n_0 bis zur nächsten Ankunft. Bestimmen Sie zu Y
   (a1) die Z-Dichte [zur Kontrolle: $p(1-p)^{k-1}$],
   (a2) Mittelwert und Streuung, (Hinweis: Ableitung von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.)
   (a3) die Verteilungsfunktion.

Aufgabe H 5.3:

Bestimmen Sie für die HMK (X_n) aus Aufg. H 5.2 im Gleichgewicht(!) die Verteilung des Zustands von (X_n) unmittelbar vor der nächsten Ankunft nach n_0. Setzen Sie (zur Vereinfachung) $n_0=0$. Betrachten Sie nur die Werte $j>0$, daraus ergibt sich der Wert für $j=0$.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit H 4.2 (b1).

Hinweis: Zeigen Sie für $j>0$: $P(X_{Y-1}=j \mid X_0=i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{k-1}{i-j} q^{i-j} r^{k-1-(i-j)} p\,.$