Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 3: Abgabe: Do 17. 11. 05 (i. d. Vorl. bis 14:20 Uhr)

Aufgabe H 3.1:

Gegeben sei folgende Definition:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$. Dann heißt
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ stoch. unabhängig bzgl. P

$$:\Longleftrightarrow \; P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \;\; \forall \; A_1 \in \mathcal{A}_1, \; A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

(a) Zeigen Sie für $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}), \; Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$:
X und Y sind stoch. unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ sind stoch. unabhängig.

(b) Die ZV $Y_1, Y_2, \ldots$ seien st.u. und identisch verteilt,
es sei $\mathcal{A}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ und $X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$.
Prüfen Sie, ob (b1) X_n, (b2) $X_{n+1} - X_n$ $\mathcal{A}_n$-adaptiert sind.

Aufgabe H 3.2: (Eigenschaften von Stoppzeiten)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $T = \mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{A}_n, n \in T)$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren (eine Filtration) in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Eine ZV $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$ ist genau dann eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_n)$,
wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{A}_n \; \forall n$.

(b) Sind τ_1, τ_2 Stoppzeiten bzgl. (A_n), dann sind auch
$\max(\tau_1, \tau_2)$, $\min(\tau_1, \tau_2)$ und $\tau_1 + \tau_2$ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{A}_n)$.

(c) Ist $(X_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}), \; n \in T)$ ein $(\mathcal{A}_n)$-adaptierter stoch. Prozess
und $B \in \mathcal{B}$, dann ist $\tau_B := \inf\{n \in T, X_n \in B\}$ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_n)$.

Aufgabe H 3.3:

(a) Beweisen Sie die starke Markov-Eigenschaft:

$$P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i, (X_m^{(\tau)}) \in A')$$
$$= P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i) = P((X_n) \in B' | X_0 = i).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Werte von τ.

(b) Beweisen Sie mit (a) die folgende Formel:

$$P(X_\tau = i_0, X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+n} = i_n) = P(X_\tau = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$