Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST



# Übungen zu Stochastische Prozesse I

**Hausaufgabenblatt 2:** Abgabe: Do 10. 11. 05 (i. d. Vorl. bis 14:20 Uhr)

**Aufgabe H 2.1:**

Gegeben sei das Wartungs-/Reparatur-Problem Beisp. 3.2.4 der Vorlesung:

Ein Bauteil arbeite maximal 5 „Takte", danach werde es gewartet.
Wenn es vorher ausfällt, finde eine Reparatur statt, die – ebenso wie die Wartung – zu Beginn des nächsten Taktes beendet sei. Nach Wartung oder Reparatur entspreche der Zustand des Bauteils dem Alter 1.
Es sei $I := 0, 1, 2, 3, 4$. Die (bedingte) Ausfall-W. bei Alter $i = 0, 1, 2, 3, 4$ sei $0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$.

(a) Skizzieren Sie den Übergangs-Graph mit Angabe der $p_{ij}$ an den Pfeilen.

(b) Berechnen Sie (b1) $f_{13}^{(n)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$, (b2) $f_{13}^*$, (b3) $m_{13}$,
außerdem nur die hierzu benötigten $f_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^*$ und $m_{ij}$.

**Aufgabe H 2.2:**

Modellieren Sie die Warteschlangenlänge an einem einsitzigen Sessellift (jeweils kurz vor der Abfahrt eines Sessels) als homogene Markov-Kette $(X_n)$, wenn die (zufällige) Anzahl der in einem Takt (= zwischen zwei Abfahrten) ankommenden Personen binomial$(2, \alpha)$-verteilt ist $(0<\alpha<1,\ \delta:=1-\alpha)$.

(a) Geben Sie $I$ und $\mathbf{P}$ an, dazu auch den Ü-Graph.

(b) Vergleichen Sie mit Beispiel 3 aus Abschnitt 4. Wo sind Unterschiede?

(c) Überprüfen Sie mit Satz 4.8 (und $i_0=0$) für welche Werte von $\alpha$ der Zustand $i=0$ rekurrent bzw. transient ist. Was folgt für $i>0$?
Wie wirken sich die Unterschiede zu Beispiel 3 aus?

**Aufgabe H 2.3:**

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage aus Satz 4.8 der Vorlesung
(dort mit Hinweis „$f_{i_0 i_0}^* = \ldots$" und „$\sum p_{i_0 j} = 1$"):
Sei $K(i)$ abgeschlossen, $i_0 \in K(i)$. Dann gilt:
$(*)$ $K(i)$ transient $\Longleftrightarrow \exists j \in K(i), j \neq i_0$ mit $f_{j i_0}^* < 1$.

(b) Warum wird (in (a)) die Voraussetzung „$K(i)$ abgeschlossen" benötigt?
Konstruieren Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel, in dem $K(i)$ *nicht* abgeschlossen ist und die Folgerung $(*)$ aus (a) *nicht* gilt.