Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 12: Abgabe: Donnerstag, 02. 02. 06

Aufgabe H 12.1:

Es sei Q eine beschränkte konservative Übergangsraten-Matrix über I.
Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe H 11.2:

$p(\cdot) := e^{Qt}$ ist eine Standard-Übergangs-Matrixfunktion
(mit den Eigenschaften (A), (B), (C), (E))
und besitzt zudem die Eigenschaft $(*)$ $p'_{ij}(0) = q_{ij},\ i, j \in I$.

Aufgabe H 12.2:

Zeigen Sie, dass für konservative HMKS die Gleichgewichtsbedingung
$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0,\ j \in I$ (2) äquivalent ist

(a) mit $\sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} = \sum_{i \neq j} \pi_j q_{ji},\ j \in I$ $(\tilde{2})$,

(b) und speziell für GuT-Prozesse mit $\pi_i q_{i,i+1} = \pi_{i+1} q_{i+1,i},\ \ i \in \mathbb{N}_0$ (2^*).
Hinweis: Betrachten Sie zuerst $i=0$ und $i=1$.

(c) Bestimmen Sie die stationären Verteilungen von (X_t) und (Z_n)
in Beispiel (A) der Vorlesung:
M|M|1|∞ mit $I = \mathbb{N}_0,\ \lambda_i = \lambda,\ \mu_{i+1} = \mu,\ i \in I$ $(\mu_0 = 0)$.
Skizzieren Sie dazu den ÜR-Graph zu (X_t) und den Ü-Graph zu (Z_n).

Aufgabe H 12.3:

(a) Bestimmen Sie für ein Bediensystem M|M|∞ (beliebig viele Bediener, daher kein Warteraum), modelliert durch eine HMKS mit $I := \mathbb{N}_0$, $\lambda_i = \lambda,\ \mu_i = i \cdot \mu$, die stationäre (Kunden-)Verteilung. (ÜR-Graph !)

(b) Zeigen Sie, dass für jeden GuT-Prozess (modelliert als HMKS) mit $\lambda_i = \lambda$, der eine stationäre Verteilung besitzt, die eingebettete Markov-Kette (Z_n) folgende stationäre Verteilung (ϱ_i) besitzt:
$(\varrho_i = \frac{1}{2}(\pi_i + \pi_{i-1}),\ i \in \mathbb{N}_0)$, wobei $\pi_{-1} := 0$.
Vorschlag: Benutzen Sie als Abkürzung $\alpha := \dfrac{1}{\pi_0}$, $\alpha_i := \dfrac{\pi_i}{\pi_0}$, $i \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $\varrho_0 = \dfrac{1}{2\alpha}$.