Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 11: Abgabe: Donnerstag, 26. 01. 06

Aufgabe H 11.1: ([Super-]Martingale und Stoppzeiten, vgl. H 3.2)

Gegeben sei ein [Super-]Martingal (X_t) bzgl. $(\mathcal{A}_t,\ t \in I)$ mit $I = \{1, \ldots, m\}$ (I endlich!) und zwei Stopzeiten S und T bzgl. $(\mathcal{A}_t)$ mit $S \leq T$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_k := \min(S + k, T)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten bildet mit $S_{k+1} - S_k \leq 1$.

(b) Zeigen Sie für $T - S \leq 1$, dass $E(X_T - X_S \mid \mathcal{A}_S) = 0$ [bzw. $\leq$ 0].

Hinweis: Zerlegen Sie $X_T - X_S$ mit $\Omega = \sum_1^m \{S = i\}$ und zeigen Sie, dass für $A \in \mathcal{A}_S$ gilt: $A \cap \{S = i\} \cap \{T > S\} \in \mathcal{A}_i$.

Aufgabe H 11.2:

Sei A eine $I \times J$-Matrix (I, J abz.). Die Norm von A sei $||A|| := \sup_i \sum_j |A_{ij}|$.

(a) Zeigen Sie (zum Aufwärmen):

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||, \quad ||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \quad \text{und} \quad |A_{ij}| \leq ||A|| .$$

Für eine $I \times I$-Matrix A mit $||A|| < \infty$ sei A^k das k-fache Matrixprodukt ($A^0 := E := (\delta_{ij})$) und $e^A := \sum_{k=0}^\infty A^k / k!$ (Existenz s. (b)).

Zeigen Sie:

(b) Für alle $i, j \in I$ ist die Reihe in $(e^A)_{ij}$ absolut konvergent.

(c) $||e^A|| \leq e^{||A||}$ und $e^{cE} = e^c \cdot E$, $c \in \mathbb{R}$.

(d) Für $||A|| < \infty$, $||B|| < \infty$ und $AB = BA$ ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(e) Falls $A_{ij} \geq 0$, $i, j \in I$ gilt auch $(e^A)_{ij} \geq 0$, $i, j \in I$.

(f) Ist $B := A + c\,E \geq 0$, $||A|| < \infty$, $c > 0$, dann gilt ebenfalls $(e^A)_{ij} \geq 0$, $i, j \in I$.