Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 10: Abgabe: Donnerstag, 19. 01. 06

Aufgabe H 10.1:

(a) Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$, X, Y st.u.,
$h : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$.
Zeigen Sie: $E(h(X,Y)|\,Y) = g(Y)$ mit $g(y) = E(h(X,y))$.

(b) Zeigen Sie (mit (a)) für $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, X, Y st.u.,
$Z := \min(X,Y)$:

(b1) $P(Z = X|\,Y) = 1 - e^{-\alpha Y}$ – mit $B := \{Z = X\}$, $P(B|\,Y) = E(1_B|\,Y))$.

(b2) $P(Z = X) = \alpha/(\alpha+\beta)$ – unter Verwendung von (b1).

Geben Sie jeweils an, welchen Satz oder welche Eigenschaft Sie benutzen.

Aufgabe H 10.2:

Eine Bank will eine Option für ein Aktienpaket absichern.
Das Aktienpaket besitze zur Zeit $t = 0$ einen Wert X_0.
Die Bank kenne die Verteilung des Wertes $X_1 = X_0 + \Delta X$ zur Zeit $t = 1$.
Zur Zeit $t = 0$ kauft Sie x Dollar zum Preis B_0 und verkauft sie wieder zur Zeit $t = 1$ zum Preis $B_1 = B_0 + \Delta B$.
Es sei Z die „Differenz von Aktiengewinn und Dollargewinn".

(a) Für welche Menge x wird $\mathrm{Var} Z$ minimal?
Welche Werte haben dann Z und EZ?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen x^* und Orthogonalprojektion?

Aufgabe H 10.3:

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(X_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$, adaptiert an $(\mathcal{A}_t)$
(d.h. X_t ist $\mathcal{A}_t$-messbar) mit integrierbaren Zufallsvariablen X_t.

Es sei $\widetilde{X}_t := \sum_{n=0}^{t-1} [E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) - X_n]$
und $Y_t = X_0 + \sum_{n=0}^{t-1} [X_{n+1} - E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)]$.

(a) Zeigen Sie $X_t := \widetilde{X}_t + Y_t$.

(b) In welchem Sinne ist $(\widetilde{X}_t)$ „vorhersagbar"?

(c) Zeigen Sie: $E(Y_t|\mathcal{A}_s) = Y_s$ für $0 \le s < t,\ s, t \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Als Vorübung wird der Fall $t = s+1$ empfohlen.