Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 1: Abgabe: Do 3. 11. 05 (i. d. Vorl. bis 14:20 Uhr)

Aufgabe H 1.1:

Es soll ein stochastischer Prozess modelliert werden, bei dem mit einem regulären Würfel wiederholt gewürfelt wird. X_n soll dabei die Zahl der verschiedenen(!) Augenzahlen angeben, die bis zum n-ten Wurf erhalten wurden (also $X_n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$) mit $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Bem.: Bei Würfelergebnis $(\omega_1, \ldots, \omega_4) = (3, 3, 4, 3)$ ist $X_2(\omega) = 1, X_4(\omega) = 2$.

(a) Notieren Sie die Start-Wahrscheinlichkeiten $P(X_0 = i_0)$ und für $n \leq 4$ die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$ für ausgewählte Werte $i_0, i_1, \ldots, i_n$. (Gewisse Vorgeschichten haben W. = 0.)

(b) Ist der Prozess (X_n) eine Markovkette? Evtl. auch eine homogene MK? Begründen Sie!

(c) Skizzieren Sie, wenn möglich, den zugehörigen Übergangs-Graph.

Aufgabe H 1.2:

Zeigen Sie, z.B. durch Induktion, dass für eine homogene Markovkette (X_n) auch die m-Schritt Übergangs-Wahrscheinlichkeiten $P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ unabhängig von n sind.

Aufgabe H 1.3:

Zeigen sie für eine homogene Markovkette $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$:

(a) Die Relation „führt zu" $(i \rightsquigarrow j)$ ist transitiv.

(b) Eine Klasse K kann nach Verlassen nicht mehr betreten werden, genauer: Wenn es eine positive Wahrscheinlichkeit gibt, eine Klasse K zu verlassen, z.B. in den Zustand $j \notin K$, dann kann diese Klasse P-fast sicher, d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1, von j aus nicht mehr betreten werden.

Mindest-Vorkenntnisse: Bedingte W., st.u. Ereignisse (z.B. Hü 2.9), Koppelung mit Dichten (4.1-3+6), Zufallsvariable+Verteilung (5.1-2), Rand-/gemeinsame Verteilung, st.u. ZV (5.9-10)