Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

6 Der Hauptsatz der Erneuerungstheorie $(t \to \infty)$

Satz Et 6.1: Für **nicht-arithmetische Ern.-Prozesse** ($\nexists\, d>0$ mit $P^{Y_2}(d \cdot \mathbb{N}_0) = 1 \,\forall n$) gelten die folgenden „äquivalenten" Aussagen: $(t \to \infty,\ \mu := EY_2)$

(a) $U(t+h) - U(t) \ \to\ \dfrac{h}{\mu}$, **(Blackwell-Erneuerungs-Theorem)**

(b) $U_0 * z(t) \ \to\ \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\infty z(s)\, ds$, **falls** z **dRi** [1]), **(Hauptsatz der Erneuerungstheorie)**

(c) $P(V_t \le v) \ \to\ G_F(v) \quad (v > 0)$, **(langfristige Stationarität)**

(d) $P(W_t < w) \ \to\ G_F(w) \quad (0 \le w \le t)$.

[1]) Eine Abb. z heißt direkt-Riemann integrierbar (dRi), wenn für die Obersummen $\overline{\sigma}(h)$ und Untersummen $\underline{\sigma}(h)$ auf $[0, \infty)$ mit Teilpunkten $h \cdot \mathbb{N}_0$ gilt: $\overline{\sigma}(h) < \infty \ \forall h$ und $\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Beweis-Idee: (c) $\Leftrightarrow$ (d) folgt aus Et 3.3: $P(W_t < w) = P(V_{t-w} \le w)$.

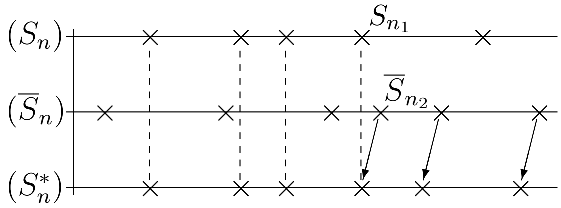
(b) $\Rightarrow$ (d): Erst $G=F$: Ern.Gleichung für $Z(t) = P(W_t < w)$: 1. Term: $P(W_t < w, S_1 < t) =$
$= 1_{[0,w)}(1-F(s))$ (wg. $W_t = t$), 2. Term: $Z * F\,(t)$. Lösung: $Z(t) = P(W_t < w) \overset{Et\,4.2}{=}$
$= U_0 * z\,(t) \overset{(b)}{\to} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)\, ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty 1_{[0,w)}(s)\,(1-F(s))\, ds = \frac{1}{\mu}\int_0^w (1-F(s))\, ds = G_F(w)$.
G allg.: $P(W_t < w) = P(W_t < w, S_1 < t) + P(W_t < w, S_1 \le t)$, 1. Term $\le P(S_1 \le t) \to 0$,
2. Term: $\int_0^\infty P(W_{t-s}^{(F)} < w)\, G(ds) = \int_0^\infty Z^{(F)}(t-s)\, G(ds) \overset{\text{maj.K.}}{\longrightarrow} \int_0^\infty G_F(w)\, G(ds) = G_F(w)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): $U(t+h) - U(t) = E[U_0(t-V_t)] = \int_{[0,h]} U_0(h-s) P^{V_t}(ds) = \int_{[0,h]} P(V_t \le h-s) U_0(ds)$
mit $P(V_t \le h-s) \le 1$ und U_0 auf $[0,h]$ endlich $\overset{\text{maj.K.}+(c)}{\longrightarrow}$ $G_F * U_0(h) = U_{st}(h) = \frac{h}{\mu}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): In $\int_0^\infty z(t-s) U_0(s)\, ds$ ist $U_0(ds) \overset{(a)}{\approx} \frac{1}{\mu}\, ds$ für große s, für kleine ist $z(t-s)$ klein (dRi).
Für alle s ist $U_0(s+h) - U_0(s) \le \frac{1}{1-F(h)} < \infty$ (aus $F^{0*} = U_0 - F * U_0$), also beschränkt.

(c1): Der Beweis wird für $F = G$ geführt. Für allg. G folgt dann die Beh. mit $P(V_t \le v) =$
$= P(V_t \le v, Y_1 > t) + \int_0^\infty P^{Y_1}(ds)\, P(V_{t-s}^{(F)} \le v)$ (1. Term $\to 0$, 2. Term $\overset{\text{maj.K.}}{\to} G_F(v)$).

(c2): Für $F = G$ ist die Haupt-Idee das **„Coupling"** (Lindvall 1975) (hier mit $\mu < \infty$):
Neben (S_n) mit $Y_1 \sim F$ betrachten wir - davon st.u. - einen EP $(\overline{S}_n)$ mit $\overline{Y}_1 \sim G_F$.
Für $\delta > 0$ tritt P-f.s. irgendwann zum ersten Mal $0 \le \overline{S}_{n_2} - S_{n_1} < \delta$ ein (z.z.!). Dann setzen wir (S_n) durch $(\overline{S}_n)$ fort. Der neue Prozess (S_n^*) verhält sich stochastisch wie (S_n) und es gilt $\lim_{t\to\infty} P(V_t > v) = \lim_{t\to\infty} P(V_t^* > v) = 1 - G_F(v)$.



Folgerung Et 6.2: $U_0(t) - \frac{t}{\mu} = (1-G_F) * U_0 \overset{Et\,6.1(b)}{\to} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-G_F(t))dt = \frac{1}{\mu} E\overline{Y}_1 = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}$.

Satz Et 6.3: Für **diskrete Erneuerungsprozesse** gelten die äquivalenten Aussagen (für $Y_1, Y_2 \in \mathbb{N}_0$, Periode$(Y_2) = 1$, $\mu := EY_2$, $n \to \infty$):

(a) $u_n := U(n) - U(n-1) \ \to\ \frac{1}{\mu}$.

(b) $U_0 * z(n) \ \to\ \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^\infty z(k)$, falls r.S. existiert und endlich ist.

(c) $P(V_n = k) \ \to\ g_F(k) := \frac{1}{\mu}[1-F(k-1)] = \frac{1}{\mu}\sum_k^\infty f_m \quad (k \ge 1)$, $\quad g_F(0) = 0$ (da $V_n > 0$).

(d) $P(W_n = k) \ \to\ g_F(k+1) = \frac{1}{\mu}[1-F(k)] = \frac{1}{\mu}\sum_{m=k+1}^\infty f_m \quad (k \ge 0)$.

Bem.: $g_F(k) = G_F(k) - G_F(k-1) = \frac{1}{\mu}\int_{k-1}^k [1-F(s)]ds = \frac{1}{\mu}[1-F(k-1)]$, da F r.s. stetig.